2005학년도 대학수학능력시험

제 2 교시 수리영역 정답과 풀이 ‘가’형

1
·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅰ. 지수와 로그
·출제 의도: 지수의 계산을 할 수 있다.
·평가 요소: 계산능력
·풀이:

$$3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{8}{9}}$$
$$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{3} \div 3^{\frac{8}{3}}$$
$$= 3^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}}$$
$$= 3$$

답 ③

2
·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅱ. 행렬
·출제 의도: 역행렬을 구할 수 있다.
·평가 요소: 계산능력
·풀이:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$에서

$$A^{-1}=\frac{1}{1\times 5-2\times 2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 X의 모든 성분의 합은

$$8+(-11)+(-3)+4=-2$$

답 ①

3
·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅰ. 방정식과 부등식
·출제 의도: 연립분수방정식을 풀 수 있다.
·평가 요소: 이해능력
·풀이:

$$\frac{x+2}{x^2-4x+3}=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}\geqq 0$$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-3)\geqq 0,\ (x-1)(x-3)\neq 0$

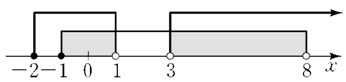
$\therefore\ -2\leqq x<1,\ x>3$ …… ㉠

$$\frac{9}{x-8}\leqq -1 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8}+1\leqq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-8}\leqq 0$$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-8)\leqq 0,\ x-8\neq 0$

$\therefore\ -1\leqq x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 범위를 그림으로 나타내면



따라서, 만족하는 정수 $x=-1,\ 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$의 6개다.

답 ⑤

4
·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅲ. 다항함수의 미분법
·출제 의도: 속도, 위치의 변화량에 대하여 이해한다.
·평가 요소: 이해능력
·풀이:

‘가’ 지점에서 ‘나’ 지점까지의 거리를 s라 하면

ㄱ. A의 평균속도는 $\dfrac{s}{40-0}$

C의 평균속도는 $\dfrac{s}{40-0}$

∴ 참

ㄴ. B의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 한 번, C의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 세 번 있다.

∴ 참

ㄷ. A, B, C 속도의 그래프와 t축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_0^t |v| dt = \int_0^t v dt$이므로 위치의 변화량을 나타낸다.

그런데, A, B, C 모두 '가' 지점에서 출발하여 '나' 지점에 도착했으므로 위치의 변화량은 모두 같다.

∴ 참

답 ⑤

5

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅰ. 지수와 로그

·출제 의도: 지수와 로그의 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

ㄱ. $2^{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \cdots + \log_2 10}$

$= 2^{\log_2 (1\cdot 2\cdot 3 \cdots 10)} = 2^{\log_2 10!} = (10!)^{\log_2 2}$

$= (10!)^1 = 10!$

따라서, 옳다.

ㄴ. $\log_2 (2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{10})^2$

$= \log_2 2^{2(1+2+3+\cdots+10)}$

$= \log_2 2^{110} = 110$

따라서, 옳지 않다.

ㄷ. $(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3)\cdots(\log_2 2^{10})$

$= 1\cdot 2\cdot 3 \cdots 10 = 10!$

따라서, 옳지 않다.

답 ①

6

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅶ. 벡터

·출제 의도: 평면의 방정식을 세울 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

평면 α와 직선 l : $x-1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$이 수직이므로

평면 α의 법선벡터 $\overrightarrow{h} = (1,\ -2,\ 3)$이고

점 A$(1,\ 2,\ 3)$을 지나므로

α의 방정식은

$1(x-1) + (-2)(y-2) + 3(z-3) = 0$

∴ $x - 2y + 3z - 6 = 0$

직선 m 위의 임의의 점은

m : $x-2 = y = \frac{z-6}{5} = t$라 하면

$(t+2,\ t,\ 5t+6)$

직선 m 위의 점 B가 평면 α 위에 있으므로

$(t+2) - 2t + 3(5t+6) - 6 = 0,\ 14t + 14 = 0$

∴ $t = -1$

따라서, B$(1,\ -1,\ 1)$

∴ $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{13}$

답 ④

7

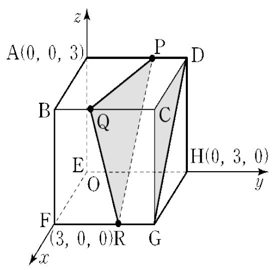
·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅶ. 벡터

·출제 의도: 벡터를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

오른쪽 그림과 같이 E를 원점 O로 하는 좌표공간에서



세 점 P, Q, R의 좌표는

P$(0,\ 2,\ 3)$

Q$(3,\ 1,\ 3)$

R$(3,\ 2,\ 0)$

∴ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (3,\ -1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (3,\ 0,\ -3)$

이 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|} = \frac{9}{\sqrt{10}\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

$\therefore\ \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{55}}{10}\quad \left(\because\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \triangle PQR = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\alpha$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{18}\times\dfrac{\sqrt{55}}{10}$

$= \dfrac{3\sqrt{11}}{2}$

$\triangle$PQR의 평면 CGHD 위로의 정사영이 $\triangle$DCG이므로

$$\cos\theta = \frac{\triangle DCG}{\triangle PQR} = \frac{\frac{1}{2}\times3\times3}{\frac{3\sqrt{11}}{2}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

답 ⑤

8
·출제 단원: 수학 Ⅱ- Ⅲ, Ⅳ. 미분법, 적분법
·출제 의도: 미분계수, 평균변화율, 정적분의 의미를 이해한다.
·평가 요소: 이해 능력
·풀이:

ㄱ. $F'(x)=f(x)>0$이므로 구간 $[a,\ b]$에서 $y=F(x)$는 증가한다.

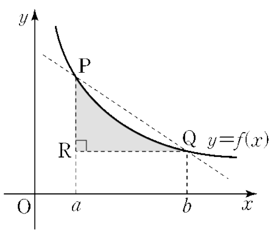
$\therefore$ 참

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{F'(b)-F'(a)}{b-a}$$

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx$



=(오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이)

$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

=($\triangle$PRQ의 넓이)

$\therefore$ 참

답 ③

9
·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅶ. 확률과 통계
·출제 의도: 경우의 수를 구할 수 있다.
·평가 요소: 이해능력
·풀이:

키가 작은 사람부터 큰 사람 순으로 a, b, c, d라 하자.

① ② ③ ④

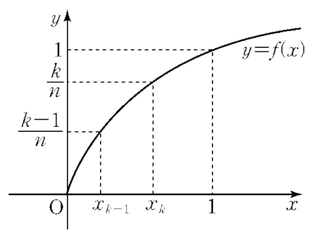
(ⅰ) a가 3번 자리에 오는 경우 $\Rightarrow$ $3!$(가지)

(ⅱ) b가 3번 자리에 오는 경우 $\Rightarrow$ a는 1번 자리에 와야 하므로 $2!$(가지)

따라서, 구하는 확률은 $\dfrac{3!+2!}{4!} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$

답 ①

10
·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅳ. 다항함수의 적분법
·출제 의도: 역함수의 대응 관계, 구분구적법에 의한 정적분의 정의를 이해한다.
·평가 요소: 내적 문제해결능력
·풀이:



위의 그림에서

$f(x_k) = \dfrac{k}{n} \Leftrightarrow g\left(\dfrac{k}{n}\right) = x_k$

$f(x_{k-1}) = \dfrac{k-1}{n} \Leftrightarrow g\left(\dfrac{k-1}{n}\right) = x_{k-1}$

이므로 $x_k - x_{k-1} = \Delta x$로 놓고 주어진 식의 값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\cdot f(x_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$= \int_0^1 f(x)dx$$

답 ③

11

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅲ. 수열

·출제 의도: 수열과 관련된 가우스 함수의 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

ㄱ. $\left[\frac{n}{k}\right]=1$에서

$1 \leqq \frac{n}{k} < 2$

$k \leqq n < 2k$

$\therefore \ \frac{n}{2} < k \leqq n$

따라서, k의 개수가 항의 개수이므로

항의 개수는 $n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}=\left[\frac{n+1}{2}\right]$

따라서, 참이다.

ㄴ. $\left[\frac{100}{k}\right]=3$에서

$3 \leqq \frac{100}{k} < 4$

$3k \leqq 100 < 4k$

$\therefore \ 25 < k \leqq 33.33\cdots$

즉, $33-25=8$(개)이다. 따라서, 참이다.

ㄷ. $\left[\frac{n}{3}\right]=5$에서

$5 \leqq \frac{n}{3} < 6$

$15 \leqq n < 18$

즉, $18-15=3$(개)이다.

따라서, 거짓이다.

답 ④

12

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅲ. 수열

·출제 의도: 수학적귀납법을 이해하고 있다.

·평가 요소: 추론능력

·풀이:

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

(1) $n=1$일 때, $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$

(2) $n=k$일 때, $a_k>1$이라 가정하면

$a_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$

$n=k+1$일 때,

a_{k+1}

$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$

$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}$

한편, $(3k+2)(3k+4)\boxed{<}(3k+3)^2$

$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}$

$>\frac{6k+6}{(3k+3)^2}=\frac{2}{3k+3}$

$\therefore \ \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\boxed{\frac{2}{3k+3}}$

$a_k>1$이므로

$a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\frac{2}{3k+3}\right)-\frac{1}{k+1}>1$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

답 ②

13

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅲ. 다항함수의 미분법

·출제 의도: 극대, 극소의 판정과 방정식의 실근의 의미를 이해한다.

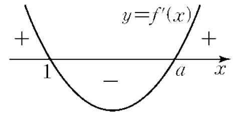
·평가 요소: 이해능력

·풀이:

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2$에서

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$

$=\boxed{6(x-a)(x-1)}$ ← (가)



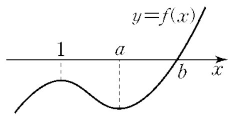
$a>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서

$\boxed{\text{극대값}}$ 을 가진다.

(나)

그런데 $f(1)=-a+1<0$이고,

$f(b)=0$이므로



오른쪽 그림과 같이 $a\boxed{<}b$

(다)

답 ④

14

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅵ. 순열과 조합

·출제 의도: 경우의 수를 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

a를 기준으로 □ 안에 b가 들어갈 수를 생각해 보자.

(i) 첫째 자리에 b가 오는 경우

$b\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a$

마지막 자리에는 a가 와야 하므로

$${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35(\text{가지})$$

(ii) 첫째 자리에 b가 오지 않는 경우

$a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square\,a\,\square$

$${}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70(\text{가지})$$

(i), (ii)에서 $35+70=105$(가지)

답 ②

15

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅶ. 벡터

·출제 의도: 벡터의 의미를 이해하고 활용할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

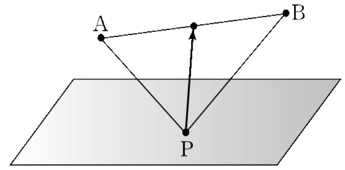
벡터 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$는 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -3,\ -1)$의 중점을 나타내는 위치벡터이므로

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})=\frac{1}{2}((3,\ 1,\ 1)+(1,\ -3,\ -1))$$
$$=(2,\ -1,\ 0)$$

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최소값은 선분 AB의 중점에서 평면까지의 거리 d이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최소값 m은

$$m=2d=\frac{2|2+1+0|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$



답 ③

16

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅶ. 확률과 통계

·출제 의도: 이항분포를 정규분포를 이용하여 풀 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

C회사 제품을 선택할 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다. 이 때, 192는 충분히 큰 수이므로 정규분포로 근사시키면

$m=192\times\frac{1}{4}=48,\ \sigma^2=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

즉, $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$이 된다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\geqq42)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{42-48}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geqq-1)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

답 ⑤

17

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅰ. 지수와 로그

·출제 의도: 복리법의 개념을 이해하고 있다.

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

n년 후의 총 인구를 S_n, 65세 이상의 인구를 T_n이라 하면

$$S_n=1000\times(1+0.003)^n \text{ (만 명)}$$

$$T_n=50\times(1+0.04)^n \text{ (만 명)}$$

초고령화 사회로 진입하는 시기는

$\dfrac{T_n}{S_n}=\dfrac{50\times1.04^n}{1000\times1.003^n}\geqq0.2$에서

$$\frac{1.04^n}{1.003^n}\geqq4$$

부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$n(\log1.04-\log1.003)\geqq2\log2$

$(0.0170-0.0013)n\geqq2\times0.3010$

$\therefore\ n\geqq\dfrac{0.6020}{0.0157}\fallingdotseq38.34$

따라서, ② 2038~2040년에 초고령화 사회가 예측된다.

답 ②

18

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅱ. 함수의 극한과 연속성

·출제 의도: 극한의 부정형 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}=\frac{2}{5}$$

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 $\dfrac{2}{5}$에 수렴하려면 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\sqrt{4+a}-b=0 \quad \therefore\ b=\sqrt{4+a}$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}$$

$$=\frac{4}{2\sqrt{4+a}}=\frac{2}{\sqrt{4+a}}=\frac{2}{5}$$

$\therefore\ \sqrt{4+a}=5$

$4+a=25$

$\therefore\ a=21,\ b=5 \quad \therefore\ a+b=26$

답 26

19

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅰ. 지수와 로그

·출제 의도: 로그부등식을 풀 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$\begin{cases}\log_3|x-3|<4 & \cdots ①\\ \log_2x+\log_2(x-2)\geqq3 & \cdots ②\end{cases}$$

①에서 $x\neq3$이고

$|x-3|<3^4$, $-81<x-3<81$,

$-78<x<84\ (x\neq3)\cdots$㉠

②에서

$\log_2x(x-2)\geqq3$

$x(x-2)\geqq2^3$

$x^2-2x-8\geqq0$

$(x-4)(x+2)\geqq0$

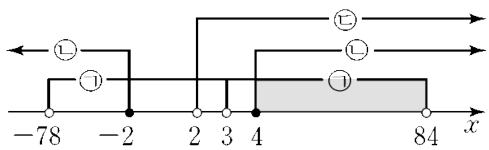
$\therefore\ x\leqq-2$ 또는 $x\geqq4 \ \cdots$ ㉡

진수는 양수이므로

$x>0$이고 $x-2>0$

$\therefore\ x>2 \quad\quad \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면



$\therefore\ 4\leqq x<84$

따라서, 정수 x의 개수는 $84-4=80$

답 80

20

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅰ. 방정식과 부등식

·출제 의도: 치환에 의한 무리방정식을 풀 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

$x^2+7x+10+\sqrt{x^2+7x+12}=0$에서

$x^2+7x+10=t$로 놓으면

$t+\sqrt{t+2}=0$

$\sqrt{t+2}=-t$

$t+2=t^2$

$t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0 \quad \therefore\ t=2$ 또는 $t=-1$

그런데 $t=2$는 무연근이므로

$t=-1$

$x^2+7x+10=-1$에서

$x^2+7x+11=0$

따라서 $D=49-44>0$이므로 방정식 $x^2+7x+11=0$은 두 실근을 가지고 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 11이다.

21

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅵ. 벡터

·출제 의도: 구의 방정식과 직선의 방정식을 이해하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

$\frac{x}{2}=y=-z=t$로 놓으면

$x=2t,\ y=t,\ z=-t$

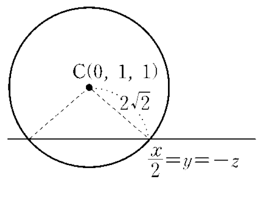
이것을 구의 방정식 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$에 대입하면

$4t^2+(t-1)^2+(-t-1)^2=8$

$6t^2+2=8$

$t^2=1 \quad \therefore\ t=\pm1$

따라서 직선 $\frac{x}{2}=y=-z$가 만나는 두 점 A, B의 좌표는 각각

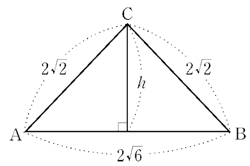


A(2, 1, −1)

B(−2, −1, 1)

$\overline{AB}=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$

삼각형 CAB의 높이를 h라 하면



$h=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ S^2=12$

22

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅴ. 이차곡선과 공간도형

·출제 의도: 타원의 방정식의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

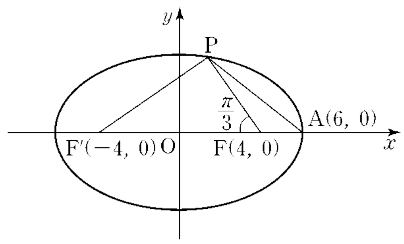
·풀이:

타원의 방정식 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$에서

$a^2-b^2=36-20=16$

이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각

F(4, 0), F′(−4, 0)



$\overline{PF}=t$로 놓으면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}=12-t$이므로 △PFF′에서 제이코사인법칙을 이용하면

$(12-t)^2=t^2+8^2-2\cdot8\cdot t\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$t^2-24t+144=t^2+64-8t$

$16t=80,\ t=5$

또, △ PFA에서 ∠ PFA$=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}^2=2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=4+25+10=39$$

23

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅳ. 수열의 극한

·출제 의도: 주어진 기호들을 이해하고 계산할 수 있다.

·평가 요소: 추론능력

·풀이:

$\boxed{z} \Rightarrow (S) \Rightarrow \boxed{1}$ 에서

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z-1}$$

$$\left(\because\ z>1\text{이므로 }\left|\frac{1}{z}\right|<1\right)$$

즉, $z-1=1$에서 $z=2$

$\boxed{y} \Downarrow (T) \Downarrow \boxed{2}$ 에서

$2=16^y \quad \therefore\ y=\frac{1}{4}$

또, $\boxed{x} \Rightarrow (S) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}}$ 에서

$$\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$$

$$\left(\because\ x>1\text{이므로 }\left|\frac{1}{x}\right|<1\right)$$

즉, $x-1=4$에서 $x=5$

$$\therefore\ \frac{xz}{y}=\frac{5\cdot2}{\frac{1}{4}}=40$$

답 40

24

·출제 단원: 수학 Ⅱ - Ⅲ. 다항함수의 미분법

·출제 의도: ·삼차방정식의 그래프의 개형을 미분법을 이용하여 그릴 수 있다.

·그래프에서 방정식의 근의 의미와 근과 계수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$에서

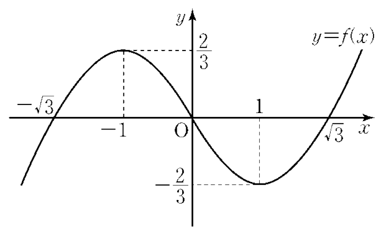
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$로 놓으면

$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x=-1$에서 극대값 $f(-1)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

$x=1$에서 극소값 $f(1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

를 가진다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $-\frac{2}{3}<k<\frac{2}{3}$이어야 한다.

곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$0\leq t<\frac{2}{3}$에서 세 실근을 $\alpha<\beta<\gamma$라 하면

$\alpha<\beta<0$, $\gamma>0$이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma$

한편 $0\leqq t<\frac{2}{3}$에서 $\gamma\geqq\sqrt{3}$이므로

최소값 $m=2\sqrt{3}$

$\therefore\ m^2=12$

25

·출제 단원: 수학 Ⅰ - Ⅳ. 수열의 극한

·출제 의도: 무한등비급수의 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

A_1의 넓이는 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

도형 A_1과 도형 A_n 위에 붙인 도형의 조각들은 모두 닮은꼴이고, n번째 조각과 $(n+1)$번째 조각의 닮음비는 4 : 1이다.

즉, 넓이의 비는 16 : 1이다.

또, 조각의 개수는 2배씩 늘어나므로

$$S_n=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}\times2+\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^2\times4+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{8-1}$$

$$=\frac{6}{7}$$

$\therefore\ p+q=7+6=13$

답 13

≪ 미분과 적분 ≫

26

·출제 단원: 미분과 적분 - Ⅰ. 삼각함수

·출제 의도: 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있다..

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad\left(\because\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

답 ①

27

·출제 단원: 미분과 적분 - Ⅱ. 함수의 극한

·출제 의도: 삼각함수와 지수함수의 극한을 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot2$$

$$=2$$

답 ④

28

·출제 단원: 미분과 적분 - Ⅲ. 미분법

·출제 의도: 우함수, 기함수의 관계를 이해하고 추론할 수 있다..

·평가 요소: 추론능력

·풀이:

$f(-x)=-f(x)$에서

ㄱ. 양변을 미분하면 $f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x)$이므로

$f'(-x)=f'(x)$ ∴ 참

ㄴ. (반례) $f(x)=x^3-x$라 하면 $f(x)$는

이계도함수를 가지고 $f(-x)=-f(x)$이지만

$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}(3x^2-1)=-1$

∴ 거짓

ㄷ. $f'(-x)=f'(x)$이므로 도함수 $f'(x)$는 우함수이다. 즉, $x=a$ $(a\neq 0)$에서 극대값을 가지면 $x=-a$에서 극대값을 갖는다.

∴ 거짓

답 ①

29

·출제 단원: 미분과 적분 - Ⅳ. 적분법

·출제 의도: 회전체의 부피의 관계를 이용하여 순간변화율을 구할 수 있다.

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

처음 물의 양을 $m\pi$라 하면

$$m\pi=\pi\int_0^u \frac{1}{3}ydy+\pi\int_0^v ydy-\pi\int_0^v \frac{1}{3}ydy$$

$$=\pi\int_0^u \frac{1}{3}ydy+\pi\int_0^v \frac{2}{3}ydy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{6}y^2\right]_0^u+\pi\left[\frac{1}{3}y^2\right]_0^v$$

$$=\frac{\pi}{6}u^2+\frac{\pi}{3}v^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{6}u^2+\frac{1}{3}v^2=m \ \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 u에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}v\cdot\frac{dv}{du}=0,\ \frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{v}$$

따라서 v가 u의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 $\frac{dv}{du}$의 값은

$$\frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{\frac{1}{2}u}=-1\ \left(\because\ v=\frac{1}{2}u\right)$$

답 ②

30

·출제 단원: 미분과 적분 - Ⅳ. 적분법

·출제 의도: 접선의 방정식을 구하여 영역의 넓이를 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

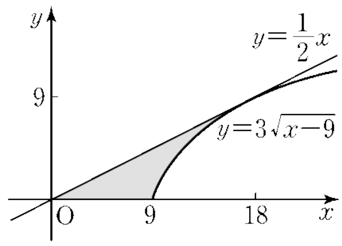
·풀이:

$y=3\sqrt{x-9}$에서 $y'=\frac{3}{2\sqrt{x-9}}$

$x=18$일 때 $y'=\frac{3}{2\sqrt{18-9}}=\frac{1}{2}$이므로

점 (18, 9)에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-18)+9=\frac{1}{2}x$



따라서 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times 18\times 9-\int_9^{18}3\sqrt{x-9}\,dx$$

$$=81-3\left[\frac{2}{3}(x-9)\sqrt{x-9}\right]_9^{18}$$

$$=81-54=27$$

답 27

≪ 확률과 통계 ≫

26

·출제 단원: 확률과 통계-Ⅰ. 자료의 정리와 요약

·출제 의도: 줄기와 잎 그림을 이해하고 평균, 중앙값, 최빈값을 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

평균

$$m=\frac{15+19+23+27+28+32+36+36+41+45}{10}$$

$=30.2$

중앙값 $n=\frac{28+32}{2}=30$

최빈값 $f=36$

$\therefore\ n<m<f$

답 ④

27

·출제 단원: 확률과 통계-Ⅲ. 확률변수와 확률분포

·출제 의도: 확률질량함수의 뜻을 알고 조건부확률의 값을 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

$\sum_{x=0}^{7}\mathrm{P}(X=x)=1$이므로

$3c+3\times2c+2\times5c^2=1,\ 10c^2+9c-1=0$

$(c+1)(10c-1)=0 \quad \therefore\ c=\frac{1}{10}\ (\because\ c>0)$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & (x=0,\ 1,\ 2)\\ \frac{2}{10} & (x=3,\ 4,\ 5)\\ \frac{1}{20} & (x=6,\ 7)\end{cases}$$

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(X\geqq3)=3\times\frac{2}{10}+2\times\frac{1}{20}=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(X\geqq6)=2\times\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{7}$

답 ③

28

·출제 단원: 확률과 통계-Ⅱ. 확률

·출제 의도: 복원추출의 경우 확률을 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

주머니에서 빨간 공을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

주머니에서 노란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

주머니에서 파란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

매 시행은 서로 독립이므로 3번의 시행에서 순서에 관계없이 빨간 공, 노란 공, 파란 공을 각각 하나씩 꺼낼 확률은

$$3!\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{100}$$

답 ②

29

·출제 단원: 확률과 통계-Ⅳ. 통계적 추정

·출제 의도: 표본비율의 분포를 이해하고 확률을 구할 수 있다.

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

임의추출한 100명 중에서 실제 참석자의 비율을 $\hat{p}$라고 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(0.43\leqq\hat{p}\leqq0.56)$이다.

이 때, 모비율은 $p=0.5$이고

$np=100\times0.5=50\geqq5$,

$nq=100\times0.5=50\geqq5$이므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(0.43\leqq\hat{p}\leqq0.56)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{0.43-0.5}{0.05}\leqq Z\leqq\frac{0.56-0.5}{0.05}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.4\leqq Z\leqq1.2)$

$= \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.4) + \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.2)$
$= 0.4192 + 0.3849$
$= 0.8041$

답 ①

30
·출제 단원: 확률과 통계-Ⅳ. 통계적 추정
·출제 의도: 모집단의 확률분포로부터 표본평균의 분포를 구할 수 있다.
·평가 요소: 내적 문제해결능력
·풀이:
모집단에서 복원추출한 크기 2인 표본을 (a, b)라 하면
$\overline{X}=1.5$인 경우의 표본은 (1, 2), (2, 1)의 2가지이므로 $a=2$
$\overline{X}=2$인 경우의 표본은
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로
$b=3$
$\therefore\ c=0.5\times0.3\times2=0.3,$
$d=0.5\times0.2\times2+0.3\times0.3=0.29$
$\therefore\ 100(b+c)=100(3+0.3)=330$

답 330

≪ 이산수학 ≫

26
·출제 단원: 이산수학 - Ⅱ. 그래프
·출제 의도: 완전그래프의 뜻을 이해하고 조합의 수를 구할 수 있다
·평가 요소: 이해능력
·풀이:
완전그래프는 서로 다른 두 꼭지점 사이에 항상 변이 있는 그래프이므로 정십각형 모양의 그래프를 완전그래프로 만들기 위해 필요한 변의 개수는
$_{10}\mathrm{C}_2-10=45-10=35$

답 ②

27
·출제 단원: 이산수학 - Ⅱ. 그래프
·출제 의도: 생성수형도의 뜻을 이해하고 경우의 수를 구할 수 있다
·평가 요소: 이해능력
·풀이:
주어진 그래프에서 생성수형도를 만들기 위해서는 회로를 찾아 더 이상 회로가 없을 때까지 변을 제거하여야 하며 그 그래프는 연결된 그래프이어야 한다.
주어진 그래프에서 한 개의 변을 제거하면 회로가 존재하며, 세 개 이상의 변을 제거하면 연결된 그래프가 아니므로 각각의 경우에 생성수형도를 만들 수 없다.
두 개의 변을 제거하면 경우에 따라 생성수형도를 만들 수 있는 데 그 경우의 수는 (7개의 변 중 두 개의 변을 제거하는 경우의 수) −(두 변을 제거해도 수형도가 되지 않는 경우의 수)이다. 즉, 두 변을 제거해도 수형도가 되지 않는 경우는 변 xy, xu,

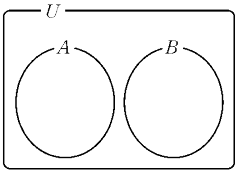
uv 중 두 변을 제거하는 경우의 수와 변 yz, zw, vw 중 두 변을 제거하는 경우의 수의 합이므로
$2\times{}_3\mathrm{C}_2=6$
따라서, 생성수형도의 개수는
$_7\mathrm{C}_2-6=21-6=15$

답 ③

28
·출제 단원: 이산수학 - Ⅰ. 선택과 배열
·출제 의도: 집합에서 서로소의 뜻을 이해하고 경우의 수를 구할 수 있다
·평가 요소: 추론 능력
·풀이:
전체집합
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이라 할 때, 서로소인 두 집합 A, B의 순서쌍의 개수는 오른쪽 그림에서

A, B, $(A\cup B)^C$의 세 영역에 각 원소가 들어가는 경우의 수이므로

$3^6=729$



답 ①

29

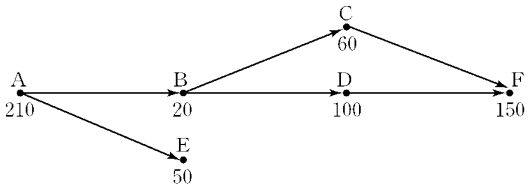
·출제 단원: 이산수학 - Ⅳ. 의사결정과 최적화

·출제 의도: 최적화와 알고리즘을 이해하고 최소 시간을 구할 수 있다

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

가능한 작업의 순서를 생각해 보면



위의 그래프에서 A에서 시작하여 E나 F로 끝나는 경로를 찾으면

· A → E(260(분) 소요)

· A → B → D → F

($210+20+100+150=480$(분) 소요)

· A → B → C → F

($210+20+60+150=440$(분) 소요)

이 중 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로가 작업을 마치기 위한 최소 작업 시간이므로 구하는 것은 480분이다.

답 ④

30

·출제 단원: 이산수학 - Ⅲ. 알고리즘

·출제 의도: 점화식을 파악하여 일반항을 구한 후 수열의 합을 구할 수 있다

·평가 요소: 내적 문제 해결 능력

·풀이:

자연수 k에 대하여 $n=5^k$일 때

$f(5n)=f(n)+3$, $f(5)=4$이므로

$f(5\cdot 5^k)=f(5^k)+3$

즉, $f(5^k)=f(5\cdot 5^{k-1})=f(5^{k-1})+3$

여기서

$f(5^{k-1})=f(5\cdot 5^{k-2})=f(5^{k-2})+3$

$f(5^{k-2})=f(5\cdot 5^{k-3})=f(5^{k-3})+3$

$\cdots$

$f(5^2)=f(5\cdot 5)=f(5)+3$

이므로

$f(5^k)=f(5)+(k-1)\cdot 3$

$=3k+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(5^k)=\sum_{k=1}^{10}(3k+1)=3\times\frac{1}{2}\times 10\times 11+10$

$=175$

답 175