함수의 극한

정의 : 함수의 극한의 수렴

x가 한없이 a에 접근할 때 $f(x)$가 L에 한없이 가까워지면
‘$x \to a$일 때 $f(x)$는 L에 수렴한다’ 라고 정의한다.

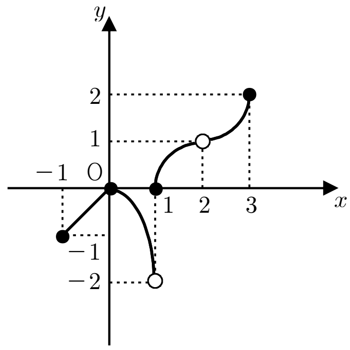
⇒ (1)

⇒ (2)

⇒ (3)

실전 1.

정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to2} f(x)$가 존재한다.

ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

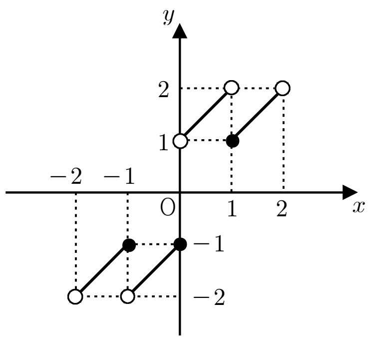
실전 2.

$a>1$일 때 $\lim_{x\to1} \frac{|x-a|-(a-1)}{x-1}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

실전 3.

개구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 개구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+f(-x)$로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to0} f(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to0} g(x)$가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

개념(1) : 합성함수의 극한값

$\lim_{x \to a} g(f(x))$ ➡ $f(x)=t$로 치환하고 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$라 두면

① α^{+}, α^{-} ② α^{+} ③ α^{-} ④ α

인지를 판단하라.

➠ 패턴❶

➠ 패턴❷

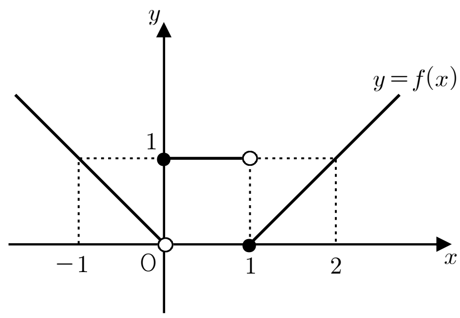
➠ 패턴❸

➠ 패턴❹

실전 4.

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ 1 & (0 \le x < 1) \\ x-1 & (x \ge 1) \end{cases}$ 이고

그 그래프는 그림과 같다. 이 때, [보기]의 설명 중 옳은 것을 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)=0$

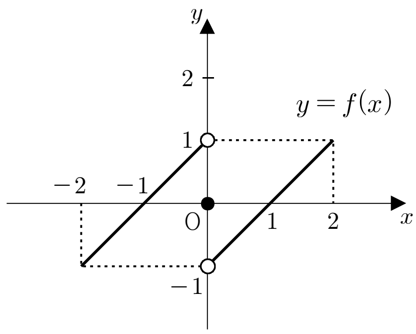
ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} f(f(x))=1$

ㄷ. $\lim_{x \to 1-0} f(f(x))=0$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

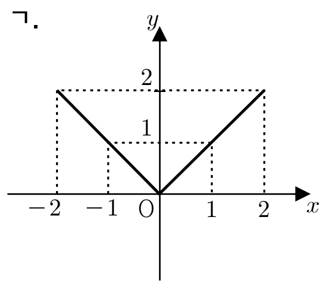
실전 5.

$f(0)=0$인 함수 $y=f(x)\ (-2 \le x \le 2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $y=g(x)\ (-2 \le x \le 2)$의 그래프가 [보기]와 같이 주어질 때, 합성함수 $y=(g \circ f)(x)$가 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이 되는 경우를 모두 고른 것은?

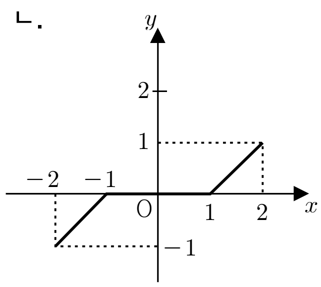


보기

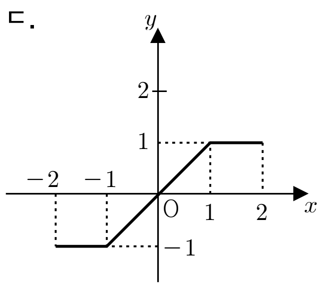
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



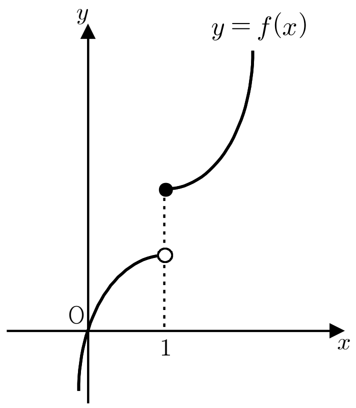
※ 특수한 경우

$\lim_{x\to a} g(x) = b$ 이고 f 가 b 에서 연속이면 $\overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$ 라 할 수 有

$\Rightarrow$

실전 6.

함수 $f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 아래의 보기에서 옳은 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(\sin x) = f\left(\lim_{x\to 0} \sin x\right)$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)$

ㄷ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(\tan x) = f\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x\right)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

실전 7.

두 함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$, $g(x) = x^2 - x$ 일 때

① $\lim_{x\to 0} g(f(x)) =$

② $\lim_{x\to 0} f(g(x)) =$

개념(2) : 연속조건

$x=a$에서 $f(x)$가 연속이려면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 한다.

실전 8.

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-12}{x-3} & (x\neq 3) \\ a & (x=3) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속일 때, a의 값은?

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

실전 9.

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & (x\geq 2) \\ x+b & (x<2) \end{cases}$ 가 $x=2$에서 연속이 되도록 상수 a, b를 정할 때, $a-b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

실전 10.

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2x-|x|} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$ 일 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

보기

ㄱ. $f(-3)=1$이다.
ㄴ. $x>0$일 때, $f(x)=x$이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 a가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

실전 11.

함수 $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\le 1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

실전 12.

실수 전체에서 정의된 다음 함수가 $x=0$에서 연속이 되기 위한 자연수 m의 최솟값은?

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^m}{(1+x^4)^{k-1}}$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

개념(2) : 연속 함수의 성질

$f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

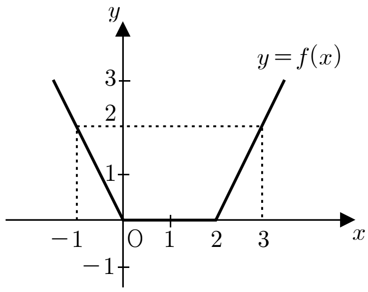
① $kf(x)$ (k는 상수) ② $f(x)\pm g(x)$

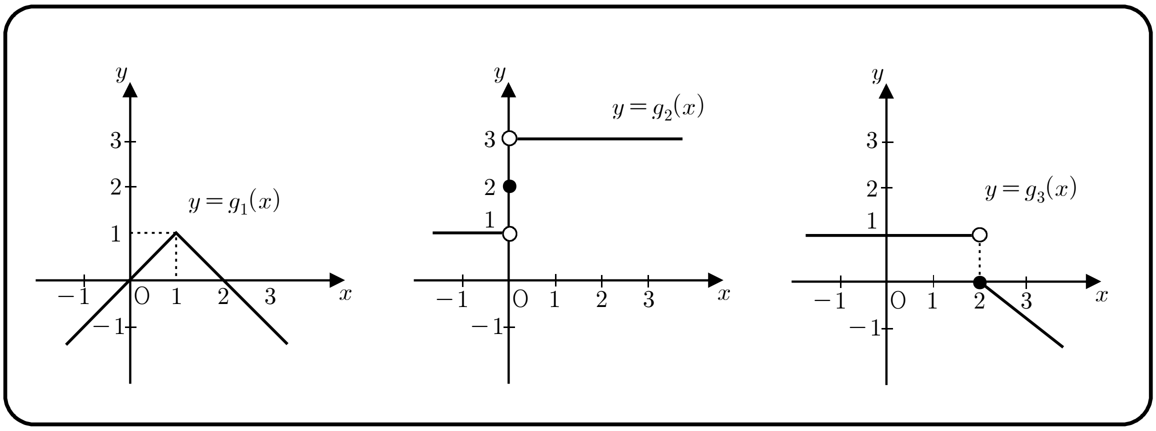
③ $f(x)\cdot g(x)$ ④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

중요 불연속×연속 ➡ 해봐야 한다!!

실전 13.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어져 있다. 아래의 그래프로 각각 주어진 함수 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $y=g_3(x)$ 중에서 $f(x)$와 곱하여 얻어지는 함수 $y=f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$가 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이 되는 $g_k(x)$를 모두 고르면?





① $g_1(x)$ ② $g_2(x)$ ③ $g_1(x)$, $g_2(x)$

④ $g_1(x)$, $g_3(x)$ ⑤ $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$

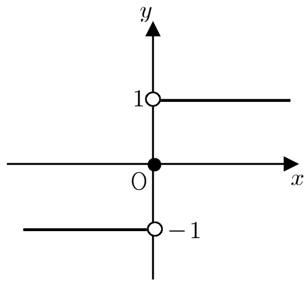
실전 14.

모든 실수에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=x^k f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k를 $N(f)$로 나타내자. 예를 들어

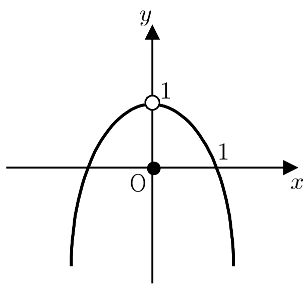
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 이면 $N(f)=2$이다.

다음 함수 $g_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $N(g_i)=a_i$라 할 때, a_i의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

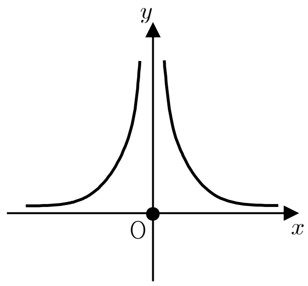
$$g_1(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$



$$g_2(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$



$$g_3(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$



① $a_1=a_2<a_3$　② $a_1<a_2=a_3$　③ $a_1=a_2=a_3$

④ $a_2=a_3<a_1$　⑤ $a_3<a_1=a_2$

실전 15.

집합 $\{x \mid 0 < x < 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 1 & (0 < x \leq 1) \\ \dfrac{1}{x-1} - 1 & (1 < x < 2) \end{cases}$ 일 때,

함수 $y = f(x)g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$ 를 [보기]에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $g(x) = (x-1)^2 \quad (0 < x < 2)$

ㄴ. $g(x) = (x-1)^3 + 1 \quad (0 < x < 2)$

ㄷ. $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (0 < x \leq 1) \\ (x-1)^2 & (1 < x < 2) \end{cases}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ