

# 제 48 회 국제수학을림피아드 (IMO)

2007년 7월 25일 (제 1 일)

Hanoi, VIETNAM

KOREAN Ver.

1. 주어진 실수  $a_1, a_2, \dots, a_n$  을 생각하자. 각각의  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )에 대하여,

$$d_i := \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

으로 정의하고,  $d := \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$  이라 하자.

- (a) 임의의 실수  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  에 대하여 다음의 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

- (b) (\*)에서 등호를 만족시키는 실수  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  이 존재함을 보여라.

2. 다섯 개의 점  $A, B, C, D, E$  를 생각하자. 사각형  $ABCD$  는 평행사변형이고, 볼록사각형  $BCED$  는 원에 내접한다고 하자. 점  $A$  를 지나는 직선  $\ell$  이, 선분  $DC$  의 내부와 점  $F$  에서 만나고, 직선  $BC$  와 점  $G$  에서 만난다고 하자.  $EF = EG = EC$  일 때, 직선  $\ell$  이 각  $DAB$  의 이등분선임을 증명하여라.

3. 수학 경시대회에서, 어떤 참가자들은 서로 친구다. 친구란 항상 상호 대칭적 관계이다. 어떤 두 명을 택해도 서로 친구인 참가자들의 모임을 '조직'이라 부르자. (단, 두 명 미만의 참가자로 이루어진 모임도 조직으로 간주한다.) 같은 조직에 속하는 참가자들의 수를 그 조직의 '크기'라 부르자.

이 경시대회에서 가장 큰 조직의 크기가 짝수라고 한다. 전체 참가자들을 두 개의 고사실에 나누어 배치하되, 한 고사실의 가장 큰 조직의 크기가 다른 고사실의 가장 큰 조직의 크기와 같도록 배치할 수 있음을 증명하여라.

\* 제한시간: 4시간 30분 \*  
\* 문항당 7점 \*