2016학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ④	02. ⑤	03. ①	04. ③	05. ②
06. ④	07. ①	08. ③	09. ④	10. ③
11. ⑤	12. ②	13. ⑤	14. ②	15. ④
16. ②	17. ①	18. ①	19. ⑤	20. ③
21. ③	22. 11	23. 10	24. 19	25. 2
26. 9	27. 3	28. 15	29. 8	30. 120

1. **출제의도** : 행렬의 덧셈, 실수배의 정의를 이용하여 행렬의 성분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A+2B=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\6 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 4\\7 & 4\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $A+2B$의 $(1,\,2)$성분은 4이다.

정답 ④

2. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{2}}$

$=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$=2+3$

$=5$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n$

$=6+0$

$=6$

정답 ①

4. **출제의도** : 등차수열에서 두 항의 차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d=7$

$a_{13}=a_{11}+2d$ 이므로

$a_{13}-a_{11}=2d$

$=2\times7$

$=14$

정답 ③

5. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2 5+\log_2\frac{4}{5}$

$=\log_2\left(5\times\frac{4}{5}\right)$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2\log_2 2$

$=2$

정답 ②

EBS

6. 출제의도 : 그래프를 나타내는 행렬의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 행의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬에서 행의 모든 성분의 합은 그래프의 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같다.
주어진 그래프의 5개의 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 각각

$2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3$

이므로 행의 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 4이다.

정답 ④

7. 출제의도 : 함수의 극한이 수렴할 조건을 이해하고 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x \to 1$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.
그러므로

$$\lim_{x \to 1}(4x-a)=0$$

$$4-a=0$$

$$\therefore\ a=4$$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{4x-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x \to 1}\frac{4(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \to 1}4$$

$$=4$$

$$\therefore\ b=4$$

따라서, $a+b=4+4=8$

정답 ①

8. 출제의도 : 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\sum_{k=1}^{11} a_k=4,\ \sum_{k=1}^{11} b_k=24$이므로

$$\sum_{k=1}^{11}(5a_k+b_k)$$

$$=5\sum_{k=1}^{11} a_k+\sum_{k=1}^{11} b_k$$

$$=5\times 4+24$$

$$=44$$

정답 ③

9. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x \to -1$일 때, $f(x) \to 1$이므로

$$\lim_{x \to -1} f(x)=1$$

또, $x \to 1+0$일 때, $f(x) \to 3$이므로

$$\lim_{x \to 1+0} f(x)=3$$

따라서,

$$\lim_{x \to -1} f(x)+\lim_{x \to 1+0} f(x)$$

$$=1+3$$

$$=4$$

정답 ④

10. **출제의도** : 역행렬을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A^{-1}의 역행렬이 존재하므로

$a \neq 0$이다.

$$A=(A^{-1})^{-1}$$
$$=\frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

행렬 A의 모든 성분의 합이 3이므로

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=3$$
$$\frac{2}{a}=2$$
$$\therefore\ a=1$$

정답 ③

11. **출제의도** : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}$$
$$=2f'(1)$$

한편, $f'(x)=2x+8$에서

$f'(1)=10$

따라서,

$2f'(1)=20$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{a_1}{2}(3^n-1)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{2}(3^n-1)}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\frac{a_1}{2}(1-0)$$
$$=\frac{a_1}{2}$$

따라서 $\dfrac{a_1}{2}=5$에서

$a_1=10$

정답 ②

13. **출제의도** : 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=g(x)$위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(2)(x-2)+g(2)$ ⋯ ㉠

이때, $g'(x)=f(x)$이고

$f(2)=1$에서 $g'(2)=1$이므로 ㉠에서

$y=1\cdot(x-2)+g(2)$

$\therefore\ y=x-2+g(2)$

이때, 접선의 y절편이 -5이므로

$x=0,\ y=-5$를 대입하면

$-5=-2+g(2)$

$\therefore\ g(2)=-3$

이때, 접선의 방정식은

EBS

$y=x-5$

$y=0$을 대입하면

$0=x-5$

$\therefore\ x=5$

따라서, 접선의 x절편은 5이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 이차방정식의 근을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $f(x)=n$ 즉,

$(x-3)^2=n$에서

$x-3=\sqrt{n}$ 또는 $x-3=-\sqrt{n}$

$\therefore\ x=3+\sqrt{n}$ 또는 $x=3-\sqrt{n}$

따라서

$h(n)=|\alpha-\beta|$

$=|(3+\sqrt{n})-(3-\sqrt{n})|$

$=2\sqrt{n}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{2}{1+1}$$

$$=1$$

정답 ②

15. 출제의도 : 함수의 그래프를 평행이동할 수 있고 역함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_3(x-a)+2$ ----㉠

그러므로

$f(x)=\log_3(x-a)+2$

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는 ㉠에서 x대신 y를, y대신 x를 대입하면 되므로

$x=\log_3(y-a)+2$

$x-2=\log_3(y-a)$

$3^{x-2}=y-a$

$\therefore\ y=3^{x-2}+a$

$\therefore\ f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$

이때, $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

$a=4$

정답 ④

16. 출제의도 : 등차중항과 등비중항의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$에서

세 항 a_2, a_k, a_8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_k=\frac{a_2+a_8}{2}$$

$$= \frac{(a_1+6)+(a_1+7\times6)}{2}$$

$$= a_1 + 24$$

$a_k = a_1 + (k-1)\times 6$이므로

$(k-1)\times 6 = 24$에서

$k = 5$

세 항 a_1, a_2, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2{}^2 = a_1 \times a_5$

$(a_1+6)^2 = a_1(a_1+24)$

$a_1{}^2 + 12a_1 + 36 = a_1{}^2 + 24a_1$

$12a_1 = 36$

$\therefore\ a_1 = 3$

$\therefore\ k + a_1 = 5 + 3 = 8$

정답 ②

17. 출제의도 : 미분을 이용하여 근에 대한 조건을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $f(x) = g(x)$에서

$3x^3 - x^2 - 3x = x^3 - 4x^2 + 9x + a$

$2x^3 + 3x^2 - 12x = a$

이때, $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$로 놓으면 함수 $y = h(x)$의 그래프와 직선 $y = a$의 교점의 x좌표가 서로 다른 양의 실수 2개, 음의 실수 1개이어야 한다.

한편,

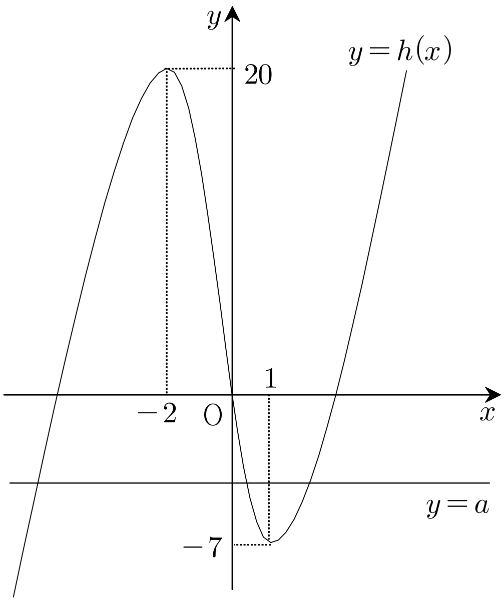
$$h'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$
$$= 6(x+2)(x-1)$$

이므로 $h'(x) = 0$에서 $x = -2$ 또는 $x = 1$

이때, 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗

함수 $y = h(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 함수 $y = h(x)$의 그래프와 조건을 만족시키는 직선 $y = a$는 다음과 같다.



이때, $-7 < a < 0$이어야 하므로 정수 a는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1$로 정수 a의 개수는 6이다.

정답 ①

18. 출제의도 : 무한히 반복되는 닮은꼴의 도형들에서 넓이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

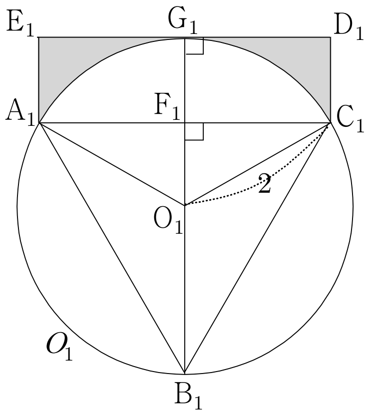
원 O_1의 중심을 O_1,

정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 한 변의 길이를 a라 하자.

점 O_1은 정삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=2$

$\therefore\ a=2\sqrt{3}$



직선 $\mathrm{B}_1\mathrm{O}_1$이 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1$과 만나는 점을 각각 F_1, G_1이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}_1}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{G}_1}=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{G}_1}-\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}_1}=2-1=1$

$$\therefore\ S_1=2\sqrt{3}\times1-\left(\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1\right)$$

$$=2\sqrt{3}-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

정삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$에 내접하는 원 O_2의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 r라 하면 두 점 O_1, O_2가 일치하므로

$r=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}_1}=1$

따라서 두 원 O_1, O_2의 닮음비가 $2:1$이다.

그림 R_n에서 처음으로 색칠된 도형을 T_n이라 하면 두 도형 T_1, T_2의 넓이의 비는 $4:1$이고, 같은 방법으로 두 도형 T_n, $T_{n+1}\,(n\ge1)$의 넓이의 비도 $4:1$이므로

$S_2=S_1+\frac{1}{4}S_1$

$S_3=S_1+\frac{1}{4}S_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2S_1$

……

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n$

$$=S_1+\frac{1}{4}S_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2S_1+\left(\frac{1}{4}\right)^3S_1+\cdots$$

$$=\frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}S_1$$

$$=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

정답 ①

19. **출제의도** : 수열에 관련된 풀이과정을 이해하여 알맞은 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$

이다. $b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면

$b_1=1$이고

$\log_2(S_{n+1}+1)=\log_2\left\{2^n(S_n+1)\right\}$

$\log_2(S_{n+1}+1)=n+\log_2(S_n+1)$

$b_{n+1} = \boxed{n} + b_n$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$
$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{n^2 - n + 2}{2} \quad (n \geq 2)$$

$b_1 = 1$에서

$$b_n = \frac{n^2 - n + 2}{2} \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$S_n = 2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} - 1$$

이다. 그러므로 $a_1 = 1$이고, $n \geq 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \left(2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 1\right) - \left(2^{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}} - 1\right)$$
$$= 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}$$
$$= 2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}} \times (2^{n-1} - 1)$$

이다.

따라서, $f(n) = n$, $g(n) = \dfrac{n^2 - 3n + 4}{2}$

이므로

$$f(12) - g(5) = 12 - \frac{5^2 - 15 + 4}{2}$$
$$= 12 - 7$$
$$= 5$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 상용로그의 지표의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건을 만족시키는 20이하의 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 다음과 같이 4가지 경우로 구분하여 구할 수 있다.

(ⅰ) $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq b \leq 9$인 경우

$f(a) = f(b) = 0$이므로

$f(ab) = f(a)f(b) + 2 = 0 \times 0 + 2 = 2$

이때, $1 \leq ab \leq 81$이므로

$f(ab) = 2$인 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $1 \leq a \leq 9$, $10 \leq b \leq 20$인 경우

$f(a) = 0$, $f(b) = 1$이므로

$f(ab) = f(a)f(b) + 2 = 0 \times 1 + 2 = 2$

이때, $10 \leq ab \leq 180$이므로

$f(ab) = 2$이려면

$100 \leq ab \leq 180$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는

순서쌍 (a, b)는

$(5, 20)$,

$(6, 17), (6, 18), (6, 19), (6, 20)$,

$(7, 15), (7, 16), \cdots, (7, 20)$,

$(8, 13), (8, 14), \cdots, (8, 20)$,

$(9, 12), (9, 13), \cdots, (9, 20)$

이므로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(ⅲ) $10 \leq a \leq 20$, $1 \leq b \leq 9$인 경우

(ⅱ)와 같은 방법으로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(ⅳ) $10 \leq a \leq 20$, $10 \leq b \leq 20$인 경우

$f(a) = f(b) = 1$이므로

$f(ab) = f(a)f(b) + 2 = 1 \times 1 + 2 = 3$

이때, $100 \leq ab \leq 400$이므로

$f(ab)=3$인 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 $a+b$의 최솟값은 21이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 함수를 구할 수 있으며 미분을 이용하여 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $f(n)=0$이고 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-n)(x^2+ax+b)$

(단, a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

또, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이어야 하므로

$f(x)=(x+n)(x-n)^2$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x-n)^2+(x+n)\times 2(x-n) \\ &=(x-n)(3x+n) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{n}{3}$ 또는 $x=n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{n}{3}$	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{32}{27}n^3$	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{n}{3}$에서 극댓값 $\dfrac{32}{27}n^3$을 가지므로

$a_n=\dfrac{32}{27}n^3$

따라서, a_n이 자연수가 되기 위한 n의 최솟값은 3이다.

정답 ③

22. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x-1}$$

$$=\frac{2^2+7}{2-1}$$

$$=11$$

정답 11

23. 출제의도 : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+10x$에서

$f'(x)=3x^2+10$

이므로

$f'(0)=10$

정답 10

24. 출제의도 : 거듭제곱의 합을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=2\sum_{k=1}^{10}k+a\times 10$$

EBS

$=2\times\dfrac{10\times11}{2}+10a$

$=10a+110$

따라서 $10a+110=300$ 에서

$10a=190$

$\therefore\ a=19$

정답 19

25. **출제의도** : 주어진 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 갖기 위해서는

행렬 $\begin{pmatrix}2a & -1\\ 8 & a-4\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

그러므로

$2a(a-4)-(-1)\times8=0$

$2a^2-8a+8=0$

$a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$

$\therefore\ a=2$

정답 2

26. **출제의도** : 무한급수의 수렴과 일반항의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+9\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}+9$

$=0+9$

$=9$

정답 9

27. **출제의도** : 미분을 이용하여 감소하는 구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

따라서 열린구간 $(-a,\ a)$에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 양수 a의 최댓값은 3이다.

정답 3

28. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

일차함수 $f(x)$에 대하여

$f(-5)=0$이므로

$f(x)=a(x+5)$ $(a>0)$

로 놓을 수 있다.

$2^{f(x)} \le 8$에서

$2^{f(x)} \le 2^3$

밑이 1보다 크므로

$f(x) \le 3$

즉, $a(x+5) \le 3$

$a>0$이므로

$x+5 \le \dfrac{3}{a}$

$x \le \dfrac{3}{a}-5$

즉, 주어진 부등식의 해가 $x \le \dfrac{3}{a}-5$ 이므로

$\dfrac{3}{a}-5=-4$에서 $\dfrac{3}{a}=1$

$\therefore$ $a=3$

따라서 $f(x)=3(x+5)$이므로

$f(0)=15$

정답 15

29. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=|x^2-2x|$에서 $x=1$일 때 $y=1$이므로

함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$

이때, 함수 $f(t)$는 $t\ne0$, $t\ne1$인 실수 t에서 연속이고 함수 $g(t)$는 이차함수이므로 모든 실수 t에서 연속이다.

그러므로 함수 $f(t)g(t)$는 연속함수의 성질에 의해 $t\ne0$, $t\ne1$인 모든 실수 t에서 연속이다.

따라서, 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속이기 위해서는 $t=0$, $t=1$에서도 연속이어야 한다.

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$, $t=1$에서 연속일 조건을 각각 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $t=0$일 때,

$$\lim_{t\to-0}f(t)g(t)=\lim_{t\to-0}f(t)\times\lim_{t\to-0}g(t)$$
$$=0\times g(0)=0$$

$$\lim_{t\to+0}f(t)g(t)=\lim_{t\to+0}f(t)\times\lim_{t\to+0}g(t)$$
$$=4\times g(0)=4g(0)$$

$f(0)g(0)=2g(0)$

위의 세 값이 같아야 하므로

$g(0)=0$

(ⅱ) $t=1$일 때,

$$\lim_{t\to1-0}f(t)g(t)=\lim_{t\to1-0}f(t)\times\lim_{t\to1-0}g(t)$$
$$=4\times g(1)=4g(1)$$

$$\lim_{t\to1+0}f(t)g(t)=\lim_{t\to1+0}f(t)\times\lim_{t\to1+0}g(t)$$
$$=2\times g(1)=2g(1)$$

$f(1)g(1)=3g(1)$

위의 세 값이 같아야 하므로

$g(1)=0$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 $g(0)=0$, $g(1)=0$이고 $g(t)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(t)=t(t-1)$

$\therefore$ $f(3)+g(3)=2+6=8$

정답 8

30. **출제의도** : 로그함수와 이차함수의 그래프를 이용하여 부등식을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 n에 대하여

$g_n(x) = \log_n x$,

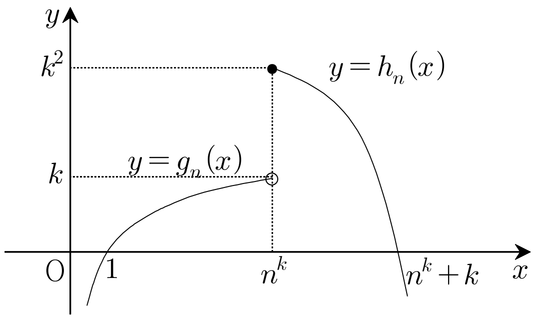
$h_n(x) = -(x-n^k)^2 + k^2$ (k는 상수)

이라 하자.

$g_n(n^k) = \log_n n^k = k$, $h_n(n^k) = k^2$ 이므로

$x < n^k$에서 $y = g_n(x)$의 그래프와

$x \geq n^k$에서 $y = h_n(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) 조건(가)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 부등식

$1 \leq x < n^k$, $y \leq g_n(x)$

를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$1 \leq x < n$일 때, 0(개)

$n \leq x < n^2$일 때,

$1 \times (n^2 - n) = n^2 - n$(개)

$n^2 \leq x < n^3$일 때,

$2 \times (n^3 - n^2) = 2n^3 - 2n^2$(개)

$n^3 \leq x < n^4$일 때,

$3 \times (n^4 - n^3) = 3n^4 - 3n^3$(개)

……

$n^{k-1} \leq x < n^k$일 때,

$(k-1)(n^k - n^{k-1})$

$= (k-1)n^k - (k-1)n^{k-1}$(개)

이므로 개수의 총합은

$(k-1)n^k - (n + n^2 + n^3 + \cdots + n^{k-1})$

$= (k-1)n^k - \dfrac{n(n^{k-1}-1)}{n-1}$

$= (k-1)n^k - \dfrac{n^k - n}{n-1}$(개)

(ii) 조건(나)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 부등식

$n^k \leq x < n^k + k$, $y \leq h_n(x)$

를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$x = n^k$일 때, k^2(개)

$x = n^k + 1$일 때, $k^2 - 1^2$(개)

$x = n^k + 2$일 때, $k^2 - 2^2$(개)

……

$x = n^k + k - 1$일 때, $k^2 - (k-1)^2$(개)

이므로 개수의 총합은

$k \times k^2 - \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots (k-1)^2\}$

$= k^3 - \dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6}$

$= \dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$(개)

두 조건 (가),(나)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 $A(n)$이라 하면 (i),(ii)에 의해

$$A(n) = (k-1)n^k - \frac{n^k - n}{n-1} + \frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

이므로 $f(2), f(3), f(4)$의 값은 각각 다

음과 같다. **정답** 120

① $n=2$일 때,

$$A(2)=(k-1)2^k-(2^k-2)+\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$
$$=(k-2)2^k+2+\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

$k=5$이면

$A(2)=96+2+95=193<300$

$k=6$이면

$A(2)=256+2+161=419>300$

이므로 $A(2)>300$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

$\therefore\ f(2)=6$

② $n=3$일 때,

$$A(3)=(k-1)3^k-\frac{3^k-3}{2}+\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

$k=4$이면

$A(3)=243-39+50=254<300$

$k=5$이면

$A(3)=972-120+95=947>300$

이므로 $A(3)>300$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

$\therefore\ f(3)=5$

③ $n=4$일 때,

$$A(4)=(k-1)4^k-\frac{4^k-4}{3}+\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

$k=3$이면

$A(4)=128-20+22=130<300$

$k=4$이면

$A(4)=768-84+50=734>300$

이므로 $A(4)>300$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 4이다.

$\therefore\ f(4)=4$

$\therefore\ f(2)\times f(3)\times f(4)=6\times5\times4=120$