제 2 교시

수학 영역(B 형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2B$의 $(1,\ 2)$ 성분은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\log_2 5+\log_2 \frac{4}{5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{3}\,x)}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

4. $\tan\theta=\frac{1}{7}$ 일 때, $\sin 2\theta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{11}{50}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{13}{50}$ ⑤ $\frac{7}{25}$

5. $\int_{0}^{1} e^{x+4}\,dx$의 값은? [3점]

① e^5-e^4 ② e^5 ③ e^5+e^4
④ e^5+2e^4 ⑤ e^5+3e^4

6. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이라 하자.
역변환 f^{-1}에 의하여 점 $(4,\ 1)$이 점 $(a,\ b)$로 옮겨질 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 함수 $f(x)=a\sin x+\sqrt{11}\cos x$의 최댓값이 6일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$$

를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은? [3점]

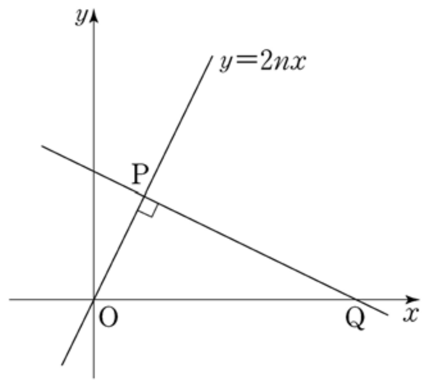
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

9. 서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

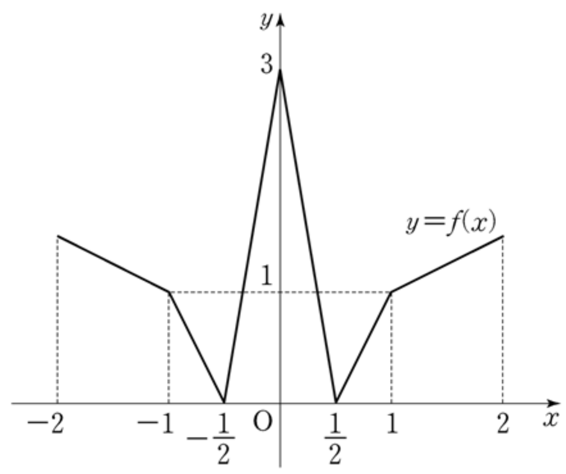
① 1024 ② 1034 ③ 1044 ④ 1054 ⑤ 1064

10. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



11. 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



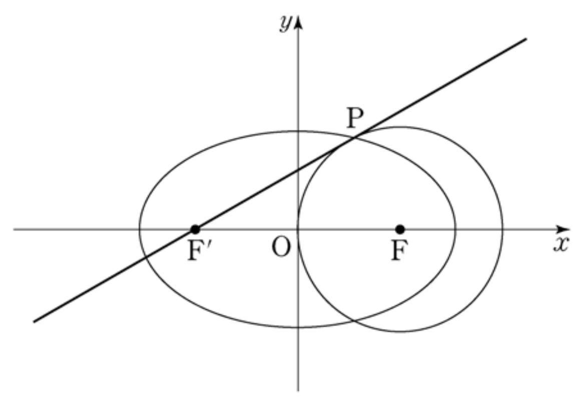
방정식

$$\frac{2}{f(x)-1}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$$

의 실근의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c인 원이 타원과 점 P에서 만난다.
점 P에서 원에 접하는 직선이 점 F′을 지날 때, c의 값은? [3점]

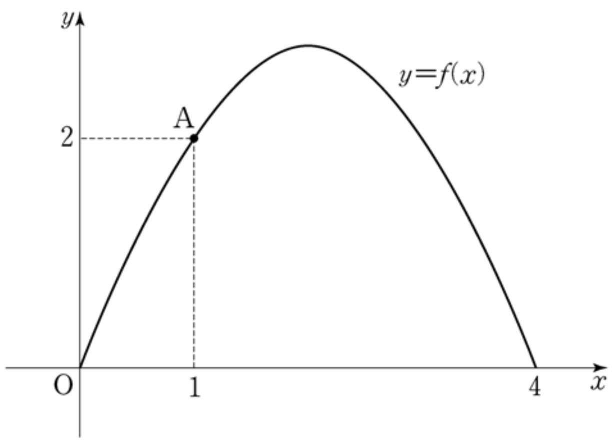


① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}-1$
④ $2\sqrt{3}-2$ ⑤ $\sqrt{14}-\sqrt{5}$

[13～14] 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수

$$f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$$

의 그래프가 그림과 같고, 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지난다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



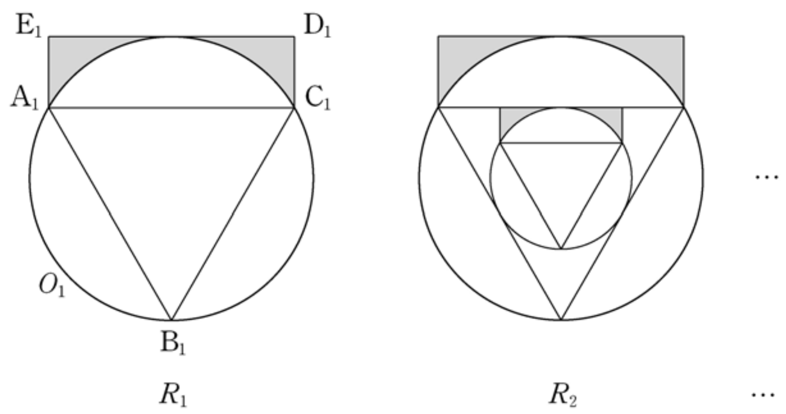
13. 직선 $y=g(x)$가 x축에 평행할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{16}{\pi}-4$　② $\frac{17}{\pi}-4$　③ $\frac{18}{\pi}-4$　④ $\frac{16}{\pi}-2$　⑤ $\frac{17}{\pi}-2$

14. 일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [4점]

① π　② $\pi+1$　③ $\pi+2$　④ $\pi+3$　⑤ $\pi+4$

15. 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 그림과 같이 직선 $\mathrm{A_1C_1}$과 평행하고 점 $\mathrm{B_1}$을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$을 사각형 $\mathrm{A_1C_1D_1E_1}$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $\mathrm{A_1C_1D_1E_1}$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{A_2C_2D_2E_2}$를 그리고 직사각형 $\mathrm{A_2C_2D_2E_2}$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ② $4\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$
④ $5\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ⑤ $5\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

16. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<1) \\ -3x+4 & (x\ge 1) \end{cases},\quad g(x)=2^x+2^{-x}$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

17. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_{n+1}=(2^n-1)(S_n+1)\quad(n\geq 1)\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

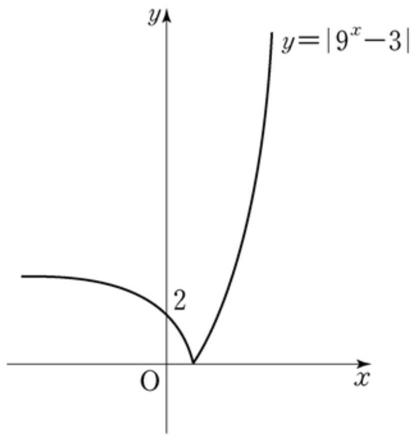
> 식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면
>
> $S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$
>
> 이다. $b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면 $b_1=1$이고
>
> $b_{n+1}=\boxed{(가)}+b_n$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $b_n=\dfrac{n^2-n+2}{2}\qquad(n\geq 1)$
>
> 이므로
>
> $S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\quad(n\geq 1)$
>
> 이다. 그러므로 $a_1=1$이고, $n\geq 2$일 때
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}$
>
> $=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{(나)}}$
>
> $=2^{\boxed{(나)}}\times(2^{n-1}-1)$
>
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(12)-g(5)$의 값은? [4점]

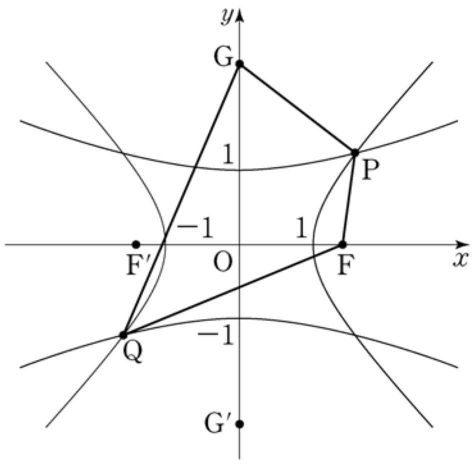
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

18. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12



19. 그림과 같이 초점이 각각 F, F′과 G, G′이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O인 두 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 P, 제3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PG}} \times \overline{\mathrm{QG}} = 8$, $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{QF}} = 4$일 때, 사각형 PGQF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x좌표와 점 G의 y좌표는 양수이다.) [4점]



① $6+2\sqrt{2}$ ② $6+2\sqrt{3}$ ③ 10
④ $6+2\sqrt{5}$ ⑤ $6+2\sqrt{6}$

20. 양수 t에 대하여 $\log t$의 가수를 $f(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, $a_4 + a_5$의 값은? [4점]

(가) $1 \le t < 100$
(나) $f(t^n) + 2f(t) = 1$

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

21. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

단답형

22. 무리방정식 $\sqrt{7x+1}=x-1$의 해를 구하시오. [3점]

23. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_7+a_{11}=20$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

24. 포물선 $y^2=20x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 y절편을 구하시오. [3점]

25. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=t^2+1, \qquad y=\frac{2}{3}t^3+10t-1$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오. [3점]

26. x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ay \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

28. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각

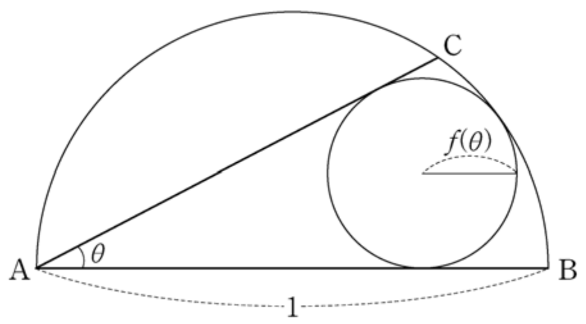
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이라 하자. 합성변환 $f \circ g$에 의하여 점 $\mathrm{A}(4,\,0)$이 옮겨지는 점을 B라 하고, 합성변환 $g \circ f^{-1}$에 의하여 점 B가 옮겨지는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 1일 때, $\sin\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 길이가 1 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 점 C 를 잡고 $\angle BAC = \theta$ 라 하자. 호 BC 와 두 선분 AB, AC 에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



30. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$ 이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은 $p + \frac{q}{\ln 2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 자연수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0) = 1$ 이고 $f(8) \le 100$ 이다.
(나) $0 \le k \le 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여
$f(k+t) = f(k)$ $(0 < t \le 1)$
또는
$f(k+t) = 2^t \times f(k)$ $(0 < t \le 1)$
이다.
(다) 열린 구간 $(0, 8)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2 이다.

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.