2007 대학수학능력시험 대비

2006학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수리탐구 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	2	①	3	③	4	⑤	5	①
6	④	7	③	8	⑤	9	⑤	10	②
11	②	12	①	13	②	14	④	15	③
16	④	17	③	18	198	19	17	20	12
21	45	22	20	23	66	24	60	25	35

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 6^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\log_3 2 = \frac{1}{2}(\log_3 6 - \log_3 2) = \frac{1}{2}\log_3 \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$

2. [출제의도] 역행렬과 행렬의 곱을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 성분의 합은 1이다.

3. [출제의도] 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x \to 2$이면 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 따라서 $1+a=0$에서 $a=-1$

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2} = b$

$\therefore\ a+b = -\frac{1}{2}$

4. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(1) = 9,\ g'(1) = 12$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h} = \frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1) = 10$

5. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\text{준식}) = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3}}{a_1-a_3} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_5}}{a_3-a_5} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{59}}-\sqrt{a_{61}}}{a_{59}-a_{61}}$

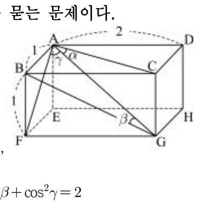
$= \frac{1}{10}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{61}}) = \frac{1}{10}(\sqrt{400}-\sqrt{100}) = 1$

6. [출제의도] 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3(\log_3 x) \leq 1,\ 0 < \log_3 x \leq 3,\ 1 < x \leq 27$

따라서 만족하는 자연수 x의 개수는 26개

7. [출제의도] 평면과 직선 사이의 각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$\overline{AB} = \overline{BF} = 1$

$\overline{AD} = 2$이므로

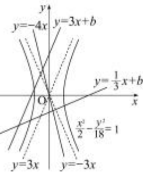
$\overline{AF} = \sqrt{2}$, $\overline{BG} = \sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{5}$, $\overline{AG} = \sqrt{6}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,

$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $\therefore\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

8. [출제의도] 쌍곡선의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하는가를 묻는 문제이다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{18} = 1$의

점근선의 방정식은 $y = \pm 3x$이다.

ㄱ. $a=-4$, $b=0$이면 교점 0개

ㄴ. $a=3$, $b>0$이면

점근선과 평행이므로 교점 1개

ㄷ. $a=\frac{1}{3}$, $b<0$이면 교점이 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9. [출제의도] 실생활과 관련된 확률 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등산화를 산 고객이 250명이므로 운동화를 사고 양말을 받은 고객의 수는 $400-250=150$명이다.

따라서, 구하는 확률은 $\frac{150}{400} = \frac{3}{8}$

10. [출제의도] 상용로그에서 지표와 가수의 뜻을 이해하는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $1<a<10$에서 $0<\log a<1$이므로

$\log 100a = 2 + \log a$

$\therefore\ [\log 100a] = 2$ (참)

ㄴ. $[\log x] = 3$이므로 $10^3 \leq x < 10^4$

따라서, 정수 x의 개수는

$10^4 - 10^3 = 10^3(10-1) = 9 \times 10^3$ (참)

ㄷ. $\log x = n + \alpha\ (0 \leq \alpha < 1)$

$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$일 때, $[\log x^2] = 2n$

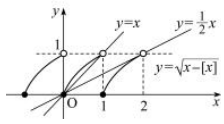
$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$일 때, $[\log x^2] = 2n+1$

$\therefore\ [\log x^2] = 2n$ 또는 $2n+1$ (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11. [출제의도] 방정식의 근의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

방정식의 실근의 개수는 두 함수 $y=\sqrt{x-[x]}$, $y=ax$의 그래프의 교점의 개수와 같다.



$y=ax$가 점$(1,\ 1)$을 지날 때 $a=1$ ⋯ ㉠

$y=ax$가 $y=\sqrt{x-1}$과 접할 때는

$ax = \sqrt{x-1}\ \ (a>0)$에서 $a^2x^2 - x + 1 = 0$이 중근을 가지므로 $D = 1-4a^2 = 0$ 에서 $a = \frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

따라서 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$

12. [출제의도] 도형에서 넓이의 변화율에 대한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

t초 후의 가로, 세로의 길이를 각각 $9+0.2t$, $4+0.3t$로 두면 정사각형의 조건에서

$9+0.2t = 4+0.3t$ 따라서 $t=50$

$S(t) = (9+0.2t)(4+0.3t) = 0.06t^2 + 3.5t + 36$이므로

$\frac{dS(t)}{dt} = 0.12t + 3.5$이고 $t=50$일 때의 넓이의 변화율은 $0.12 \times 50 + 3.5 = 9.5$(㎠/초)이다.

13. [출제의도] 정적분을 적용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\text{회전체의 부피}) = \pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)dx - \pi\int_{-1}^{1}(x^2)^2dx$

$= 2\pi\int_0^1(2-x^2)dx - 2\pi\int_0^1(x^2)^2dx$

$= 2\pi\left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - 2\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{44}{15}\pi$

14. [출제의도] 순간변화율을 이용하여 극한값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x) = x^3 - 3x$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 3$이므로 구간 $[0,\ a_n]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 $x = a_{n+1}$이라 하면

$\frac{a_n{}^3 - 3a_n}{a_n} = 3a_{n+1}{}^2 - 3$

$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}a_n\ \ (\because\ a_n > 0)$이므로 $a_n = a_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

ㄱ. 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$이므로

함수 $y=f(x)$는 감소한다.

따라서 $0 < a_{n+1} < a_n < 1$를 만족하는 a_n에 대하여

$f(a_n) < f(a_{n+1})$

ㄴ. $f'(x) = 3x^2 - 3$에서 $f'(a_n) = 3a_n{}^2 - 3$

$f'(a_{n+1}) = 3a_{n+1}{}^2 - 3 = a_n{}^2 - 3$이므로

$f'(a_n) - f'(a_{n+1}) = 2a_n{}^2 > 0$

$\therefore\ f'(a_n) > f'(a_{n+1})$

ㄷ. $a_n = a_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = f'(0) = -3$

그러므로 옳은 것은 ㄴ과 ㄷ이다.

15. [출제의도] 삼각형의 넓이에 대한 정리를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 점 Q는 평행사변형 PBTC의 대각선 BC의 중점이므로 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QT}$ ⋯ ㉠

또, 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

이므로 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AR}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{QT}$

사각형 AQTR는 평행사변형이므로 $\boxed{\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{RT}}$

따라서 △RBT는 △ABC의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형이다.

한편, 두 선분 BC와 RT의 교점을 M이라고 하면, $\overline{AQ} /\!/ \overline{RT}$이고 점 R가 선분 AC의 중점이므로

점 M은 선분 CQ의 중점이다. $\therefore \overline{MB} = \frac{3}{4}\overline{BC}$

$\angle RMB = \angle AQB$이므로

$\triangle RBT = \frac{1}{2} \times \overline{RT} \times \overline{MB} \times \sin(\angle RMB)$

$= \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \frac{3}{4}\overline{BC} \times \sin(\angle AQB) = \boxed{\frac{3}{4}}\ \triangle ABC$

16. [출제의도] 벡터의 내적에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A$(4,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 6,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 6)$에 대하여

점 D, E의 좌표는 각각 D$(2,\ 3,\ 0)$, E$(0,\ 2,\ 4)$이다.

점 P가 선분 DE위를 움직이므로

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DE} = (2,\ 3,\ 0) + t(-2,\ -1,\ 4)$

$= (-2t+2,\ -t+3,\ 4t)$ (단, $0 \leq t \leq 1$)

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (-2t-2,\ -t+3,\ 4t)$이므로

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = (-2t+2,\ -t+3,\ 4t) \cdot (-2t-2,\ -t+3,\ 4t)$

$= (4t^2-4) + (t^2-6t+9) + 16t^2 = 21t^2 - 6t + 5$

$= 21\left(t - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{32}{7}$

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$의 최소값은 $t = \frac{1}{7}$일 때 $\frac{32}{7}$이다.

17. [출제의도] 정규분포를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

X는 정규분포 N$(8,\ 2^2)$을 따르고 화살 한 발을 쏘아 8점을 득점할 확률은 P$(8 < X \leq 12)$이므로

$P(8 < X \leq 12) = P\left(\frac{8-8}{2} < Z \leq \frac{12-8}{2}\right) = P(0 < Z \leq 2)$

$= 0.4772$

화살을 쏘았을 때 득점하는 사건은 독립이므로

12발 쏘았을 때, 8점을 득점한 화살의 수 Y의 기대값 $E(Y) = np = 12 \times 0.4772 = 5.7264$

18. [출제의도] 정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\text{준식}) = \int_0^9 \frac{x^3+8}{x+2}dx = \int_0^9 \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$= \int_0^9 (x^2-2x+4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x\right]_0^9 = 198$

19. [출제의도] 도형의 성질을 이해하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

12개의 점 중 두 점을 선택하는 경우의 수는

${}_{12}C_2 = 66$(가지)이고,

같은 행 또는 같은 열에 있는 두 점을 선택할 때에만 선분의 길이가 유리수가 되므로 유리수인 선분의 수는 $3 \times {}_4C_2 + 4 \times {}_3C_2 = 30$ 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{30}{66} = \frac{6}{11}$ $\therefore\ a+b = 17$

20. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식의 해와의 관계를 이용하여 최대값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식이 $x=y=0$이외의 해를 가지므로

$4a\left(a-\frac{10}{a}\right)+b\left(b-\frac{8}{b}\right)=0$

$4a^2+b^2-48=0$에서 $4a^2+b^2=48$이고 a, b가 양의 실수이므로 $48=4a^2+b^2 \geqq 2\sqrt{4a^2b^2}=4ab$

따라서, ab의 최대값은 12이다.

21. [출제의도] 평면과 구의 위치 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

구가 평면에 의해 잘린 도형은 원이다.

세 점 $(18,0,0)$, $(0,9,0)$, $(0,0,9)$를 지나는 평면의 방정식은 $\frac{x}{18}+\frac{y}{9}+\frac{z}{9}=1$에서 $x+2y+2z=18$

원점에서 이 평면 사이의 거리는 $\frac{|-18|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6$

이므로 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{9^2-6^2}=\sqrt{81-36}=\sqrt{45}$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 45π이다.

22. [출제의도] 이산확률분포의 기대값을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\frac{1}{10}-p\right)+\left(\frac{1}{10}+p\right)+\left(\frac{1}{10}-p\right)+\ldots+\left(\frac{1}{10}+p\right)=1$이므로

$\frac{2n}{10}=1$ 따라서 $n=5$

확률변수 X의 기대값이 $\frac{23}{4}$이므로

$$\begin{aligned} E(X)&=1\left(\frac{1}{10}-p\right)+2\left(\frac{1}{10}+p\right)+\ldots+10\left(\frac{1}{10}+p\right)\\ &=\frac{1}{10}(1+2+\ldots+10)+(-p+2p-\ldots+10p)\\ &=\frac{55}{10}+5p=\frac{23}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=\frac{1}{20}$이므로 $\frac{1}{p}=20$

23. [출제의도] 약수와 배수의 성질을 이용하여 수열에서의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라고 하면

n열에 있는 수의 개수는 $\left[\frac{20}{n}\right]$이므로

$\left[\frac{20}{1}\right]+\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{20}{20}\right]$

$=20+10+6+5+\cdots+1=66$

24. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AD}\perp\alpha$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$

점 H는 선분 BC의 중점이므로

$\overline{AH}=\sqrt{10^2-6^2}=8$, $\overline{DH}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\therefore\ \triangle DBC=\frac{1}{2}\times12\times10=60$

25. [출제의도] 확률을 적용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

투입된 공이 A, B, C, D에 도달할 확률은 각각 $\frac{1}{2^2}$이다.

네 곳 모두 켜지려면 한 곳은 세 번, 세 곳은 각각 한 번씩 공이 도달해야 한다. 여섯 개의 공이 A에 세 개 B, C, D에 각각 한 개씩 도달하는 경우의 수는 A, A, A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!}$이고 이 중 네 개의 공이 A, B, C, D에 각각 한 개씩 도달하여 네 번째 공 만에 게임이 끝나는 경우인 $4!$가지가 제외되어야 한다. B, C, D에 세 개의 공이 도달하는 경우도 마찬가지이므로 구하는 확률은 $4\left(\frac{6!}{3!}-4!\right)\times\left(\frac{1}{2^2}\right)^6=\frac{3}{32}$

[미분과 적분]

26	④	27	①	28	③	29	②	30	20

26. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{1}{2}$

27. [출제의도] 접선의 기하학적 의미를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{a\to0}\tan\theta$는 곡선 $f(x)=2^x-1$ 위의 원점에서 그은 접선의 기울기이다.

$f'(x)=2^x\ln2$이므로 $a=f'(0)=2^0\ln2=\ln2$

28. [출제의도] 치환적분법을 이용하여 삼각함수의 정적분의 값을 추론할 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_1+a_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\ \sec^2x\,dx$

$\tan x=t$일 때, $\sec^2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\ \sec^2x\,dx=\int_0^1t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

(참)

ㄴ. 마찬가지로 생각하면

$a_2+a_4=\int_0^1t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. 일반적으로 $a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}$

$=(a_{4k+1}+a_{4k+3})+(a_{4k+2}+a_{4k+4})$

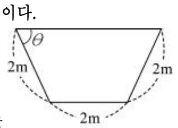
$=\int_0^1t^{4k+1}\,dt+\int_0^1t^{4k+2}\,dt=\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=0}^{24}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4})$

$=\sum_{k=0}^{24}\left(\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}$ (거짓)

29. [출제의도] 미분을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.



사다리꼴의 윗변과 등변이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

높이는 $2\sin\theta$, 윗변의 길이는 $2\times2\cos\theta+2$이므로 사다리꼴의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}(4+4\cos\theta)\times2\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$S'(\theta)=4(-\sin\theta)\sin\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)=4(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, 극대이면서 최대이다.

따라서 단면의 최대 넓이는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $3\sqrt{3}$이다.

30. [출제의도] 부피와 높이의 변화율에 대한 문제를 정적분을 이용하여 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그릇에 깊이가 $h$cm가 되도록 물을 넣었을 때 물의 부피 V는 $V=\int_0^h\pi(\sqrt{9+h^2})^2dh=\int_0^h\pi(9+h^2)dh$

$=\pi\left[9h+\frac{1}{3}h^3\right]_0^h=\pi\left(9h+\frac{1}{3}h^3\right)$

$V=\pi\left(9h+\frac{1}{3}h^3\right)$ 따라서 $\frac{dV}{dt}=\pi(9+h^2)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt}=260\pi$이고 $h=2$이므로 $260\pi=\pi(9+4)\left[\frac{dh}{dt}\right]_{h=2}$

$\therefore\ \left[\frac{dh}{dt}\right]_{h=2}=\frac{260\pi}{13\pi}=20$ (cm/초)

[확률과 통계]

26	②	27	②	28	⑤	29	④	30	24

26. [출제의도] 가중평균값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{140\times300+100\times260+160\times350}{400}=310$ (명/km^2)

27. [출제의도] 경우의 수를 활용하여 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(1) $i=1,2,3,4,5$일 때, $f(i)=i$인 경우 1가지

(2) $f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=3$, $f(4)=4$, $f(5)=5$인 경우 조건을 만족하고 이와 같은 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이므로 10가지

(3) $f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=3$, $f(5)=5$인 경우 조건을 만족하고 이와 같은 경우의 수는 ${}_5C_2\times{}_3C_2\times\frac{1}{2!}=15$이므로 15가지

따라서 일대일 대응의 개수는 $1+10+15=26$개이다.

28. [출제의도] 실생활과 관련된 확률 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

지난 달 한 달 동안 비가 온 날은 $9+3=12$일이고 비가 온 12일 중 비가 온다고 예보하여 우산을 가지고 나온 날은 9일이므로 구하는 확률은 $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

29. [출제의도] 구간추정을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{400}=0.2$, $n=400$이므로 모비율 p에 대한 95% 신뢰구간의 길이는

$1.96\times2\times\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}}=0.0784$

30. [출제의도] 확률분포를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

전체 선분의 수는 ${}_8C_2=28$이고, 길이가 1인 경우는 12가지, 길이가 $\sqrt{2}$인 경우는 12가지, 길이가 $\sqrt{3}$인 경우는 4가지이므로 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	계
$14X^2$	14	28	42	
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

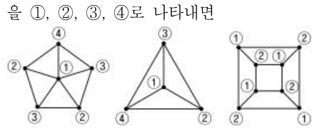
$\therefore\ E(14X^2)=6+12+6=24$

[이산수학]

26	④	27	⑤	28	①	29	⑤	30	11

26. [출제의도] 꼭지점을 색칠하는 최소의 색을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그래프를 색칠하는데 필요한 서로 다른 종류의 색깔을 ①, ②, ③, ④로 나타내면



$\therefore\ x+y+z=4+4+2=10$

27. [출제의도] 그래프의 여러 가지 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 꼭지점의 차수가 홀수인 점이 있으므로 오일러 회로가 존재하지 않는다.

ㄴ. (모든 꼭지점의 차수의 합)$=2\times$(변의 개수)$=18$

ㄷ. 각 회로에서 변을 하나씩만 제거하면 생성수형도가 되므로 생성수형도의 개수는 ${}_3C_1\times{}_5C_1=15$

28. [출제의도] 수의 규칙성을 추론하여 나머지를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$1^5+3^5+5^5+\cdots+19^5$

$=(1^5+3^5+7^5+9^5)+(11^5+13^5+17^5+19^5)+(5^5+15^5)$

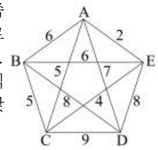
따라서 $1^5+3^5+5^5+\cdots+19^5$을 5로 나눈 나머지는 $2(1^5+2^5+3^5+4^5)$을 5로 나눈 나머지와 같다.

$1^5=1$, $2^5=32$, $3^5=243$, $4^5=1024$

$2(1^5+2^5+3^5+4^5)$을 5로 나눈 나머지는 0이므로 $1^5+3^5+5^5+\cdots+19^5$을 5로 나눈 나머지도 0이다.

29. [출제의도] 알고리즘을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

표를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 다음과 같은 방법으로 건설비용의 최소값을 찾을 수 있다.



㉠ 먼저 A를 선택하고 A와 직접 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. ∴ A－E

㉡ A 또는 E와 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. ∴ A－E－C

㉢ A 또는 C와 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. 단, 회로가 생기면 안 되므로 A－C는 제외한다. ∴ A－E－C－B

㉣ A 또는 B와 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. 단, 회로가 생기면 안 되므로 A－C와 A－B는 제외한다. ∴ D－A－E－C－B

∴ A와 직접 연결되는 도시는 D, E이다.

30. [출제의도] 경우의 수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

시험에 사용하지 않은 컴퓨터를 ×라 하고 가능한 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

(1) A가 앉은 컴퓨터를 비우는 방법의 수
(×, A, C, B), (×, B, C, A), (×, C, A, B)의 3가지

(2) 두 번째 비어있는 컴퓨터를 비우는 방법의 수
(B, ×, C, A), (C, ×, A, B)의 2가지

(3) B 또는 C가 앉은 컴퓨터를 비우는 방법의 수는 A가 앉은 컴퓨터를 비우는 방법의 수와 같으므로 $3\times2=6$

(1), (2), (3)에서 모든 방법의 수는 $3+2+6=11$가지이다.

수리'나'형 정답

1	④	2	①	3	②	4	⑤	5	①
6	④	7	⑤	8	④	9	⑤	10	②
11	④	12	②	13	③	14	④	15	⑤
16	③	17	③	18	27	19	17	20	12
21	920	22	20	23	66	24	105	25	35
26	①	27	②	28	①	29	②	30	32

해 설

1. ~ 2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

각 항을 자연수 n으로 나누면

$\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n+4}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n} \leqq \lim_{n\to\infty}a_n \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}$

$2 \leqq \lim_{n\to\infty}a_n \leqq 2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n = 2$이다.

4. [출제의도] 여사건의 확률을 이해하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꺼낸 공 2개가 모두 검은 공일 확률이 $\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{28}{45}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{28}{45}=\frac{17}{45}$

5. ~ 6. '가'형과 동일

7. [출제의도] 지수함수를 이해하여 최소값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=2^{(x-1)^2+2}$ 이므로 $x=1$일 때 지수의 최소값이 2이다. 따라서 함수 $f(x)$의 최소값은 4이다.

8. [출제의도] 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=a_n^{\frac{1}{2}}$에서 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ 이므로

극한값 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이다.

9. ~ 10. '가'형과 동일

11. [출제의도] 행렬의 연산과 역행렬의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A^2=B^2 \nRightarrow A=B$ 또는 $A=-B$

(반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\&0\ 1\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $E=E-A^2=(E+A)(E-A)$

$\therefore (E+A)^{-1}=E-A$ (참)

ㄷ. A의 역행렬이 존재한다면 $A^2=A$의 양변에 A^{-1}를 곱하면 $A^2A^{-1}=AA^{-1}$

따라서 $A=E$이므로 $A\neq E$라는 가정에 모순이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 이항정리를 이용하여 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r\,x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r\,x^{n-2r}$이므로

$n-2r=2$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$에서

$n=3,\ 5$일 때, $n-2r=2$를 만족하는 정수 r의 값이 존재하지 않으므로 x^2항은 존재하지 않는다.

$n=2,\ 4,\ 6$일 때, $n-2r=2$를 만족하는 r의 값은 각각 0, 1, 2이므로, x^2항의 계수는

${}_2\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2=1+4+15=20$이다.

13. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 등비수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-1)f(x)+11$이고

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$\therefore\ 2^{10}+2^9+\cdots+2+1=f(2)+11$

$\therefore\ f(2)=\frac{2^{11}-1}{2-1}-11=2^{11}-12$

14. [출제의도] 수열의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $3^3=27$이므로 $a_3=7$(참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$=4+6+6+6+0=22$(참)

ㄷ. $13^{13}=(10+3)^{13}$이므로 13^{13}의 일의 자리수와 3^{13}의 일의 자리수는 서로 같고,

$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ \cdots$ 이므로 3^n의 일의 자리수는 3, 9, 7, 1, 3, ⋯ 으로 반복되어 13^{13}의 일의 자리수는 3이다. 이와 같은 방법으로 23^{23}의 일의 자리수는 7이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=k\,(k\geqq2)$일 때, $2^{k+1}>\boxed{k(k+1)}+1$이므로

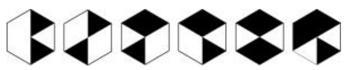
$2\times2^{k+1}=2^{k+2}>2(k^2+k+1)$이고, 이 때

$2(k^2+k+1)-\boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$

$=k^2-k-1=k(k-1)-1\boxed{>}0$

16. [출제의도] 색칠하는 방법의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정육각형에 칠해진 검은색 삼각형의 개수가 2개인 우, 3개인 경우, 4개인 경우는 각각 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 $2+2+2=6$

<참고> 네 자연수의 합이 6인 숫자의 조합은 (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2)이다. 이 수들을 원형으로 배열하는 방법은 아래 그림의 세 가지이다. 그림에 나열된 수와 같은 정삼각형의 개수에 흰 색 또는 검은 색을 번갈아 칠하면 정육각형을 네 부분으로 구분하는 한 가지 방법과 대응되므로 6가지이다.

17. '가'형과 동일

18. [출제의도] 거듭제곱의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{\frac{3^{14}+3^{10}}{3^8+3^4}}=\sqrt{\frac{3^{10}(3^4+1)}{3^4(3^4+1)}}=3^3=27$

19. ~ 20. '가'형과 동일

21. [출제의도] 이항분포를 이해하여 평균과 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

확률변수 X의 평균은 $\mathrm{E}(X)=90\times\frac{1}{3}=30$이고

분산은 $\mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$이다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서 $\mathrm{E}(X^2)=920$이다.

22. ~ 23. '가'형과 동일

24. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 집합의 원소의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

-2를 포함하는 원소가 세 개인 부분집합의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$이므로 -2는 15번 더해진다. 다른 6개의 원소에 대해서도 같은 방법으로 생각하면 모두 15번 더해지므로 구하는 합은

$S_1+S_2+\ldots+S_{10}=15(-2-1+1+2+3+4)=105$

25. '가'형과 동일

26. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\1+\frac{1}{3}+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}&\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{pmatrix}$ 이므로

$c_n=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ $\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}c_n=\frac{3}{2}$

27. [출제의도] 도형에 관한 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

R_1의 짧은 변의 길이를 x라 하면 R_2의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 $x,\ 1-x$이고 R_1과 R_2가 닮음이므로 $x:1=(1-x):x$

$x^2+x-1=0$에서 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad(\because\ x>0)$

또 R_n과 R_{n+1}사이에 $1:\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$의 닮음비가 성립하므로 $l_{n+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}l_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{l_1}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}l_1$ 이므로

$k=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$이다.

28. [출제의도] 지수함수를 이용하여 수의 대소관계를 판정할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(1) $\frac{A}{B}=\frac{a^ab^bc^c}{a^ab^cc^b}=\frac{b^{b-c}}{c^{b-c}}=\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}$에서

$0<\frac{b}{c}<1,\ b-c<0$이므로 $\frac{A}{B}>1$ $\ \therefore\ B<A$

(2) $\frac{B}{C}=\frac{a^ab^cc^b}{a^bb^cc^a}=\frac{a^{a-b}}{c^{a-b}}=\left(\frac{a}{c}\right)^{a-b}$에서

$0<\frac{a}{c}<1,\ a-b<0$이므로 $\frac{B}{C}>1$ $\ \therefore\ C<B$

(1), (2)에서 $C<B<A$

29. [출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

농업 또는 임업 종사자의 매년 감소율을 r라 하면

$(1+r)^5=0.8$ $\ \therefore\ 1+r=0.8^{\frac{1}{5}}$

2000년으로부터 n년 후의 종사자의 수(단위:만명)는

$216(1+r)^n=216\times0.8^{\frac{n}{5}}$ 이므로 $216\times0.8^{\frac{n}{5}}\leqq216\times\frac{1}{2}$

양변에 로그를 취하여 정리하면 $\frac{n}{5}\log0.8\leqq-\log2$

$n\geqq\frac{5\times0.3010}{0.097}=15.5\cdots$

따라서 2000년으로부터 16년 후인 2016년 초이다.

30. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

8개 조 8경기에서 이긴 선수 8명은 4개 조로 나누어 4경기를 치른다. 이때 이긴 선수 4명은 준결승전 2경기, 결승전 1경기, 3, 4위전 1경기 등 모두 4경기를 하여 1위부터 4위까지의 순위를 결정한다. 첫 경기에서 이기고 둘째 경기에서 진 선수 4명도 위와 같이 4경기를 치러 5위부터 8위까지의 순위를 결정할 수 있다.

처음 8개조 8경기에서 진 선수 8명도 마찬가지 방법으로 9위부터 16위까지 순위를 정할 수 있다.

따라서 1위부터 16위까지의 순위를 모두 정하기 위해서는 32경기를 치러야 한다.