(홀수형)

2006학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1. $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{5}{3}}$

$$= 5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

답 ②

2. $2A + X = AB$에서

$X = AB - 2A$

$= AB - 2AE$

$= A(B - 2E)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

답 ②

3. a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore \ a_5 = 4a_3 = 8$

이 때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \ \therefore \ d = 3$

$\therefore \ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

답 ③

4. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$P(A \cap B) = 0$

또, $A \cup B = S$이므로

$P(A \cup B) = P(S) = 1$

따라서 확률의 덧셈정리에 의해

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 2P(B) + P(B) - 0$

$= 3P(B) = 1$

$\therefore \ P(B) = \frac{1}{3}$

$\therefore \ P(A) = 2P(B) = \frac{2}{3}$

답 ①

5. 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의 표준편차는

$\sigma(X) = \sqrt{100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}} = \frac{20}{5} = 4$

$\therefore \ \sigma(3X - 4) = 3\sigma(X) = 12$

답 ①

6. (나)에서

$(E - B)^2 = E^2 - 2B + B^2 = E - B$

$\therefore \ B^2 = B \ \cdots$ ㉠

$\therefore \ B^3 = B^2 B = BB = B$

또,

$BA^3 = (BA)A^2 = (AB)A^2 = -BA^2$

$= -(BA)A = -(AB)A = BA = AB$

$= -B$

$\therefore \ B^3 + 2BA^3 = B - 2B = -B$

답 ⑤

7. $b_n = n$, $c_n = n + 1$이라 하면

$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{n(n+1)}{2}$,

$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n + 1}{2}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k}=2$$

그런데 $\sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} c_k$이므로

$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k} > \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k} > \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k}=2$

답 ②

8. $\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)=\frac{1}{3}$이고 $\mathrm{P}(m\leq X\leq 2)=\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(0\leq X\leq m)=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore \frac{1}{2}\cdot m\cdot \frac{1}{3}m=\frac{1}{3}$

$\therefore m=\sqrt{2}$ ($\because m>0$)

답 ④

9. 주어진 조건에서 $a\neq 1$, $b\neq 1$이다.

자연수 n에 대하여 $a^n<b^n$이므로

$a<b$

$0<a<b<1$ 또는 $1<a<b$일 때,

i) $m>n$이면 $a^m>a^n$, $b^m>b^n$이고,

ii) $m<n$이면 $a^m<a^n$, $b^m<b^n$이다.

그런데, i), ii)는 모두 주어진 조건에 모순이다.

$\therefore 0<a<1<b$

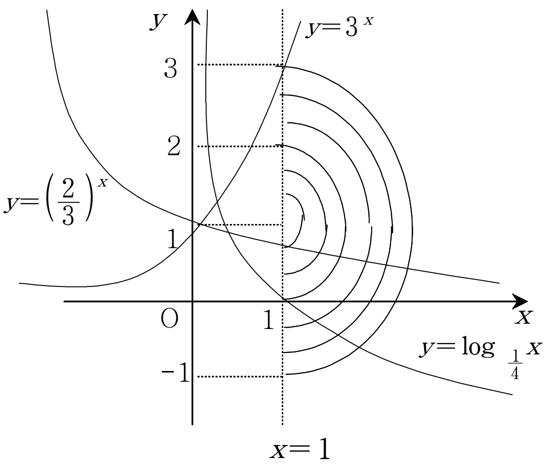
주어진 조건에서 $b^n<b^m$이므로 $n<m$이어야 하고, 이 때 $a^m<a^n$이 성립한다.

$\therefore n<m$

이상에서 $0<a<1<b$, $m>n$이다.

답 ①

10. 세 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y=3^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore a=4,\ b=6,\ c=1$

$\therefore c<a<b$

답 ④

11. ㄱ. 2006은 4자리의 자연수이므로 $\log 2006$의 지표는 3이다.

$\therefore f(2006)=3$ (참)

ㄴ. $\log 2$, $\log 6$의 가수는 각각 $\log 2$, $\log 6$이므로 $g(2)=\log 2$, $g(6)=\log 6$이다.

또, $12=1.2\times 10^1$이므로 $\log 12$의 가수는 $\log 1.2$이다.

$\therefore g(12)=\log 1.2$

$\therefore g(2)+g(6)=\log 2+\log 6$

$=\log 12=\log 1.2+1=g(12)+1$ (참)

ㄷ. 임의의 양수 x에 대하여

$\log x=$(지표)$+$(가수)$=f(x)+g(x)$이므로

$\log a=f(a)+g(a)$, $\log b=f(b)+g(b)$이고

$\log ab=f(ab)+g(ab)$이다.

그런데, $\log ab=\log a+\log b$이므로

$f(ab)+g(ab)=f(a)+g(a)+f(b)+g(b)$이다.

따라서 $f(ab)=f(a)+f(b)$이면

$g(ab)=g(a)+g(b)$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

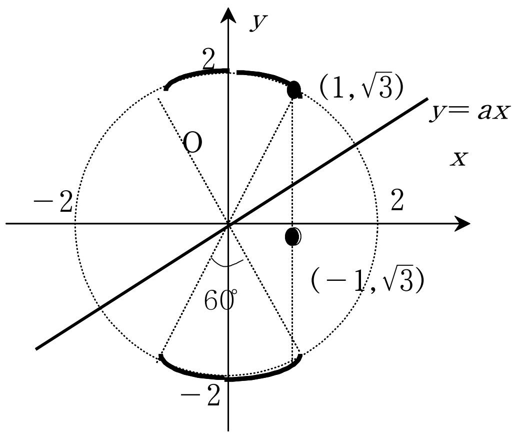
답 ⑤

12. 행렬 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & a \end{pmatrix}$가 역행렬을 가질 조건은

$ax-y\neq 0$ 즉, $y\neq ax$이다.

따라서 점 $P(x, y)$는 원점을 지나고 기울기가 a인 직선 $y=ax$ 위에 있지 않은 점이다.

따라서 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 60°인 2개의 호이다.



따라서 구하는 도형의 길이는

$2\times\dfrac{60°}{360°}\times 4\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

답 ④

13. ㄱ. (반례) $a_{3k}=\dfrac{1}{2^{3k-1}}\cos\dfrac{(3k-1)\pi}{2}$에

$k=2$를 대입하면

$a_6=\dfrac{1}{2^5}\cos\dfrac{5\pi}{2}=\dfrac{1}{2^5}\cdot 0=0$ (거짓)

ㄴ. $a_{4k-1}=\dfrac{1}{2^{4k-2}}\cos\dfrac{(4k-2)\pi}{2}$

$=\dfrac{1}{2^{4k-2}}\cos(2k-1)\pi=-\dfrac{1}{2^{4k-2}}$,

$b_{4k-1}=\dfrac{1+(-1)^{4k-2}}{2^{4k-1}}=\dfrac{2}{2^{4k-1}}=\dfrac{1}{2^{4k-2}}$

이므로

$a_{4k-1}+b_{4k-1}=0$ (참)

ㄷ. $\{a_n\}$: 1, 0, $-\dfrac{1}{4}$, 0, $\dfrac{1}{16}$, 0, $\cdots$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{4}{5}$

$\{b_n\}$: 1, 0, $\dfrac{1}{4}$, 0, $\dfrac{1}{16}$, 0, $\cdots$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{3}$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14. 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(11, \left(\dfrac{2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$ 즉, $N(11, 1^2)$을 따른다.

$\therefore$ $P(10\leqq\overline{X}\leqq 14)$

$=P\left(\dfrac{10-11}{1}\leqq\dfrac{\overline{X}-11}{1}\leqq\dfrac{14-11}{1}\right)$

$=P(-1\leqq Z\leqq 3)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1)+P(0\leqq Z\leqq 3)$

$=0.3413+0.4987=0.84$

이 때, A, B 두 사람이 각각 독립적인 표본을 임의추출하였으므로 두 사람이 뽑은 표본의 표본평균이 10 이상 14 이하일 확률은 모두 0.84로 같고, 두 사건은 서로 독립이다.

따라서 두 표본평균이 모두 10 이상 14 이하일 확률은 $0.84\times 0.84=0.7056$이다.

답 ②

15. l_1은 반지름의 길이가 8, 중심각의 크기가 θ인 호의 길이이므로 $l_1=8\theta$이다.
또, l_2는 반지름의 길이가 $8\sin\theta$, 중심각의 크기가 θ인 호의 길이이므로 $l_2=8\theta\sin\theta$이다.
마찬가지로 $l_3=8\theta\sin^2\theta$, $l_4=8\theta\sin^3\theta$, $\cdots$이다.
따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 8θ이고 공비가 $\sin\theta$인 무한등비수열이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{8\theta}{1-\sin\theta}=12\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{1}{3}$

답 ⑤

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$\displaystyle+\{5(m+1)-3\}\frac{1}{m+1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$\displaystyle+\frac{5m+2}{m+1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left\{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\right\}$

$\displaystyle+\frac{5m+2}{m+1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$

$\displaystyle+\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\frac{1}{m+1}\ +\frac{5m+2}{m+1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$

$\displaystyle+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\ +\frac{5m+2}{m+1}$

$\displaystyle=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$

$\displaystyle=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 $5m+2$, m, $5k-3$이다.

답 ③

17. 주어진 조건을 만족하려면 3개의 가로 행에는 각각 적어도 하나의 검은 색 유리상자가 들어가야 하고, 4개의 세로 열에도 각각 적어도 하나의 검은 상자가 들어가야 한다.
따라서 3개의 가로 행 중에서 2개의 검은 색 유리상자가 포함될 1개의 행을 택하는 방법의 수는 3가지이고, 이 행의 4개의 유리 상자 중에서 검은 색 유리상자로 바뀔 2개의 상자를 택하는 경우는 수는 ${}_4C_2=6$(가지)이다.
이제 위의 3×6=18가지 경우의 수 중의 하나가 아래의 그림과 같다고 하자.

	a		c
	b		d

이제 a, b 중에서 한 행을 택하고 c, d 중에서 나머지 한 행을 택하는 방법의 수는
2×1=2(가지)이다.
따라서 구하는 방법의 수는

18×2=36

답 ④

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5\cdot 3^{n+1}}{3^n}-\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$=\frac{5\cdot 3-0}{1+0}=15$

답 15

19. $a_2-a_1=3$,

$a_3-a_2=3\cdot 2$

$a_4-a_3=3\cdot 2^2$

$a_5-a_4=3\cdot 2^3$

$\therefore\ a_5=a_4+24=(a_3+12)+24$

$=10+12+24=46$

답 46

20. $\log_3 ab=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 27=3$,

$\log_3\frac{b}{a}=\log_3 b-\log_3 a=5$

따라서 $\log_3 a=X$, $\log_3 b=Y$라 하면

$X+Y=3$이고 $Y-X=5$이므로

이 두 등식을 연립하여 풀면

$X=-1$, $Y=4$

$\therefore\ 4\log_3 a+9\log_3 b=4X+9Y=32$

답 32

21. $4^x-7\cdot 2^x+12=0$에서

$(2^x-3)(2^x-4)=0$

따라서 $2^\alpha=3$, $2^\beta=4$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\cdot 2^\alpha\cdot 2^\beta$

$=(3+4)^2-2\cdot 3\cdot 4$

$=49-24=25$

답 25

22. 확률의 합은 1이므로

$\frac{4}{7}+a+b=1$ ⋯ ㉠

$\frac{4}{7}$, a, b가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$a^2=\frac{4}{7}b$ ⋯ ㉡

$E(X)=k\cdot\frac{4}{7}+2k\cdot a+4k\cdot b$

$=\frac{k}{7}(4+14a+28b)=24$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡을 연립하면

$a=\frac{2}{7}$, $b=\frac{1}{7}$ ($\because\ a>0$)

이것을 ㉢에 대입하면

$k=14$

답 14

23. A영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{3}{4}$,

B영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

이 때, 3번째 시행에서 마치는 경우는

A, A, B의 순서로 칠하거나,

B, B, A의 순서로 칠하게 되는 경우이다.

이 때, 위의 각 경우의 확률은 각각

$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$, $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$이므로

구하는 확률은

$\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$

$\therefore\ p+q=16+3=19$

답 19

24. $\log_3 x=t\ \ (1\leqq x\leqq 81)$로 놓으면 $0\leqq t\leqq 4$ 이고,

$y=(\log_3 x)(-\log_3 x)+2\log_3 x+10$

$=-t^2+2t+10$

$=-(t-1)^2+11$

이 때, $t=1$일 때 최대값 $M=11$,

$t=4$일 때 최소값 $m=2$를 갖는다.

$\therefore\ M+m=11+2=13$

답 13

25. $\log\frac{C}{C_0}=-kt$에

$C_0=8\times10^5,\ t=3,\ C=2\times10^5$을 대입하면

$\log\frac{1}{4}=-3k\ \therefore\ k=\frac{\log 4}{3}=\frac{2}{3}\log 2$

따라서

$\log\frac{C}{C_0}=-kt$에

$C_0=8\times10^5,\ t=a,\ C=8\times10^3$을 대입하면

$\log\frac{1}{100}=-\frac{2a}{3}\log 2$

$\therefore\ -2=-\frac{2a}{3}\times0.3$

$\therefore\ a=10$

답 10

26. 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	남학생	여학생	계
중국어	12		
일본어		7	
계	18	16	

이제 위의 표를 완성하면 다음과 같다.

	남학생	여학생	계
중국어	12	9	21
일본어	6	7	13
계	18	16	34

이 학급에서 선택된 한 학생이 중국어 수업을 받을 사건을 A, 여학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$

답 ③

27. $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix},\ B^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$이므로

$A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix},\ B^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\n+1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A=\left\{\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\middle|\,n\text{은 자연수}\right\}$,

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\n+1\end{pmatrix}\middle|\,n\text{은 자연수}\right\}$

따라서 자연수 n, m에 대하여

ㄱ. $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\in S$이면

$\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\n+1\end{pmatrix}\in T$ (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\in S,\ \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+1\\1\end{pmatrix}\in S$이면

$b+d\neq1$이므로 $\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+m+1\\2\end{pmatrix}\notin S$ (거짓)

ㄷ. $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\in S,\ \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m+1\end{pmatrix}\in T$이면

$\begin{pmatrix}a&p\\b&q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1&1\\1&m+1\end{pmatrix}$이다.

이 때, $(n+1)(m+1)-1\neq0$이므로 역행렬을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

28. 1부터 30까지의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 r ($r=0,1,2$)인 집합을 A_r라 하면

$A_0=\{3,9,15,21,27\}$,

$A_1=\{1,7,13,19,25\}$,

$A_2=\{5,11,17,23,29\}$

이 때, 두 수의 합이 3이 되는 경우는 다음과 같다.

i) (A_1의 원소)+(A_2의 원소)인 경우

$${}_5C_1\times{}_5C_1=5\times5=25(\text{가지})$$

ii) (A_0의 원소)+(A_0의 원소)인 경우

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10(\text{가지})$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$25+10=35(\text{가지})$$

답 ⑤

29. ㄱ. (반례) $p=2$이면

$a_2=a_1+1=1\neq 2a_1=0$ (거짓)

ㄴ. (가), (나)에서

$a_1=0$,

$a_2=a_1+1=1$

$a_3=a_2+1=2$

$\cdots$

$a_p=a_{p-1}+1=p-1$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_p$

$=0+1+2+\cdots+(p-1)=\dfrac{p(p-1)}{2}$ (참)

ㄷ. (다)에 $k=p$를 대입하면

$a_{p+p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

$a_{2p+p}=a_{3p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

$\cdots$

$a_{kp}=a_p=p-1$

$\therefore\ a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고)

$p=5$일 때 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, $\cdots$

30. $2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$$2\,{}_nC_1a^1=2an$$

$(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$

의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$${}_nC_2a^2-an=\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$$

이 때, $2an=\dfrac{n(n-1)}{2}a^2-an$ 즉,

$3an=\dfrac{n(n-1)}{2}a^2$이어야 하므로

$3=\dfrac{n-1}{2}a$

$\therefore\ a(n-1)=6\ \cdots$ ㉠

㉠을 만족하는 모든 경우는 다음과 같다.

a	$n-1$	n	an
1	6	7	7
2	3	4	8
3	2	3	9
6	1	2	12

따라서 구하는 an의 최대값은 12이다.

답 12