

[문제 1] 수열의 성질과 미분에 관한 물음에 제시문을 읽고 답하시오. (50점)

(가) 영이 아닌 상수 α 와 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \beta$ 인 수렴하는 수열 $\{d_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n + \alpha) = \beta + \alpha$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ 이다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 $x = d$ 에서 미분가능하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = d$ 이고, 임의의 자연수 n 에 대하여 $\mu_n \neq d, \gamma_n \neq d$ 를 만족하는 수열 $\{\mu_n\}$ 과 수열 $\{\gamma_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\mu_n) - f(d)}{\mu_n - d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\gamma_n) - f(d)}{\gamma_n - d}$ 가 성립한다.

1. $a_1 = 2$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때 a_n 을 구하고 수학적 귀납법으로 증명하시오. 모든 자연수 n 에 대하여 $c_n = \frac{a_n}{2n+1}$ 이라할 때 모든 자연수 n 에 대하여 $c_n < c_{n+1}$ 을 보이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 를 구하시오.

2. $b_1 = 2, b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의되는 수열 $\{b_n\}$ 이 있다. 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n > b_{n+1}$ 임을 수학적 귀납법으로 증명하고 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항 b_n 을 구하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 를 구하시오.

3. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$ 에 대하여, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ 을 증명하시오. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c}$ 와 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(b)}{b_n - b}$ 을 비교·설명하고, $x = c$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분가능성을 제시문 (나)의 관점에서 설명하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 좌표평면에서 일차변환 f 와 g 를 나타내는 행렬을 각각 A 와 B 라 하자. E 를 2차 단위행렬이라고 할 때, 행렬 A, B 는 다음을 만족시킨다.

$$(1) A+B=2E \qquad (2) A^2+B^2=4E$$

(나) 일차변환 $h: (x,y) \rightarrow (x',y')$ 을 나타내는 식이 $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ (a_{ij} 는 실수, $i,j=1,2$)로

주어졌을 때, 행렬 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 를 일차변환 h 를 나타내는 행렬이라고 한다.

1. 일차변환 f 가 역변환을 가질 때 행렬 A 와 B 를 구하시오.
2. 일차변환 f 가 점 $(1,0)$ 을 점 $(1,a)$ 로 보낼 때 실수 a 가 만족해야 할 조건을 말하고, 그 조건을 충족하는 경우 행렬 A 와 B 의 쌍을 구하시오.
3. 일차변환 f 가 점 $(1,0)$ 을 점 $(2,b)$ 로 보낼 때 행렬 A 와 B 의 쌍을 구하시오.