문제 2

Ⅰ. 문제

<문제 2>

[가] 일반적으로 좌표평면 위의 변환 $f:(x,\ y)\to(x',\ y')$ 이 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수)의 꼴로 나타날 때, 이러한 변환 f를 일차변환이라고 한다. 좌표평면 위의 점을 직선이나 점에 대하여 대칭인 점으로 옮기는 대칭변환, 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환, 0이 아닌 실수 k에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 $\mathrm{P}'(kx,\ ky)$로 옮기는 닮음변환 등이 일차변환의 예이다. 일차변환 f를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

여기서, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 라고 놓으면 $X'=AX$ 이다. 임의의 일차변환 $f,\ g$에 대하여 f와 g의 합성변환도 일차변환이고, f를 나타내는 행렬을 A, g를 나타내는 행렬을 B라고 하면 $g\circ f$를 나타내는 행렬은 BA이다. 특히 자연수 n에 대하여 f를 n번 합성한 함수 f^n을 나타내는 행렬은 A^n이고, A의 역행렬 A^{-1}가 존재하면 f의 역변환 $f^{-1}:(x',\ y')\to(x,\ y)$ 도 일차변환이고 f^{-1}를 나타내는 행렬은 A^{-1}이다.

[나] 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 r개($n\geq r$)를 택할 때, 이것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다. 순열과 조합의 관계를 이용하여 다음 공식을 얻을 수 있다.

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (\text{단, } 0<r\leq n)$$

이 수는 행렬의 전개식에서도 자주 등장한다. 이차정사각행렬 A와 이차단위행렬 E에 대하여 다음 등식들이 성립한다.

$$(A+E)^2=A^2+{}_2\mathrm{C}_1A+E$$

$$(A+E)^3=A^3+{}_3\mathrm{C}_1A^2+{}_3\mathrm{C}_2A+E$$

$$(A+E)^4=A^4+{}_4\mathrm{C}_1A^3+{}_4\mathrm{C}_2A^2+{}_4\mathrm{C}_3A+E$$

$$(A+E)^5=A^5+{}_5\mathrm{C}_1A^4+{}_5\mathrm{C}_2A^3+{}_5\mathrm{C}_3A^2+{}_5\mathrm{C}_4A+E$$

이 등식에 나타나는 계수들은 $(x+1)^2,(x+1)^3,(x+1)^4,(x+1)^5$ 의 이항전개에서 나타나는 계수와 일치함을 볼 수 있다.

【2-1】 좌표평면 위의 점 $(3,0)$에서 포물선 $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x$ 가 일차변환 $f:(x,\ y)\to(2x,x+3y)$ 에 의하여 옮겨지는 곡선에 이르는 최단거리를 구하시오.

【2-2】 일차변환

$f : (x,\ y) \to (x,\ 0)$,

$g : (x,\ y) \to (0,\ y)$,

h : 직선 $y = mx$ (단, $m \neq 0$) 에 대한 대칭변환

에 대하여 합성변환 $f \circ h \circ g \circ h \circ f$ 를 나타내는 행렬을 B 라고 놓자. 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ 라고 할 때, 무한급수 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$의 수렴, 발산을 설문하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

【2-3】 제시문 [나]를 참고하여 $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} - 1 & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} - 1 \end{pmatrix}$ 일 때

$$(2\times1)\,{}_7\mathrm{C}_2 E + (3\times2)\,{}_7\mathrm{C}_3 A + (4\times3)\,{}_7\mathrm{C}_4 A^2 + (5\times4)\,{}_7\mathrm{C}_5 A^3 + (6\times5)\,{}_7\mathrm{C}_6 A^4 + (7\times6)\,{}_7\mathrm{C}_7 A^5$$

을 구하시오.

【2-4】 $\sin\frac{\pi}{5}$ 를 s 라고 할 때, 문제 【2-3】의 행렬 A에 대해 A^7 을 s 에 관한 식으로 나타내시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

일차변환을 이차곡선에 적용하여 얻어지는 새로운 이차곡선의 방정식을 구할 수 있는 능력을 평가하고자 출제된 문제이다. 일차변환의 합성에 관한 추론 및 연산능력, 이항전개에 관한 정확한 개념 및 활용능력, 삼각함수의 배각공식의 활용 및 응용력 등이 본 문제를 통해 평가된다.

2. 채점기준

[2-1] 일차변환을 이용하여 옮겨진 포물선의 방정식을 구하고 임의의 점을 잡아 최단거리를 구하는 과정을 평가한다.

[2-2] 주어진 합성변환에 의한 행렬을 구하고 이를 이용하여 수열을 구하고 수열의 성질을 파악하는 과정이 필요하다. 수열의 성질을 이용하여 무한급수의 수렴여부를 조사하고 그 합을 구하는 과정과 결과까지 평가한다.

[2-3] 제시문 [나]를 이용하여 직접 이항계수를 계산하여 값을 구하는 것을 평가한다.

[2-4] 회전변환의 상수배와 삼각함수의 배각공식을 사용하여 식을 정리하는 과정을 평가한다. 그리고 이를 문제에서 원하는 방법으로 바꾸어 표현한 답까지 구하는 것이 필요하다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

제시문은 일차변환과 행렬과의 관계, 이항계수와 이항정리 부분을 발문으로 활용하였다. 고교 교과서의 「기하와 벡터」과정에 나오는 일차변환 단원과 「적분과 통계」에 나오는 이항정리에 관