샘플 : 2강 포함배제의 원리(1)

Thm (3)

유한집합 U의 부분집합 A, B, C에 대하여

(1) $|A^c \cap B^c| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$ 이다.

(2) $|A^c \cap B^c \cap C^c| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|)$
$- |A \cap B \cap C|$ 이다.

(1)의 증명

(2)의 증명

예제 9

0부터 9까지의 10개의 숫자를 일렬로 나열한 순열 중에서
첫째자리가 2보다 크고 마지막 자리가 7보다 작은 것의 개수를 구하여라.

예제 10

자연수 n이하의 자연수로서 n과 서로소인 수의 개수를 구하여라.
단) n의 소인수분해는 $n = p^a q^b r^c$ (p, q, r은 서로 다른 소수 a, b, c는 자연수)이다.

Thm (4) : 포함과 배제의 원리①

(1) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

(2) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

(2)의 증명

※참고

$(1+x)^l = \binom{l}{0} + \binom{l}{1}x + \binom{l}{2}x^2 + \cdots + \binom{l}{l}x^l$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$\binom{l}{0} - \binom{l}{1} + \binom{l}{2} - \cdots + (-1)^l\binom{l}{l} = 0$ 이므로

$\binom{l}{1} - \binom{l}{2} + \cdots - (-1)^l\binom{l}{l} = \binom{l}{0} = 1$

즉, $\binom{l}{1} - \binom{l}{2} + \cdots + (-1)^{l+1}\binom{l}{l} = 1$ 이다.

Thm (5): 포함배제의 원리②

유한집합 U의 부분집합 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$에 대하여

$|A_1 \cup A_2 \cup\ \cdots\ \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 -\ \cdots\ + (-1)^{n+1} S_n$이다.

여기서

$S_1 = |A_1| + |A_2| +\ \cdots\ + |A_n|$

$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| +\ \cdots\ + |A_{n-1} \cap A_n|$

$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| +\ \cdots\ + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

$\vdots$

$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap\ \cdots\ \cap A_n|$ 이다.

(증명)

Thm (6)

$|A_1^c \cap A_2^c \cap\ \cdots\ \cap A_n^c| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 +\ \cdots\ + (-1)^n S_n$ 이다.

(증명)

예제 11

방정식 $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 17$의 음이 아닌 정수해 중에서

각 w_i가 6을 넘지 않는 해의 개수를 구하여라.