2014학년도 수시2차 자연계열 논술고사 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 출제의도
미분과 적분의 활용 능력을 측정한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설
(가) 주제 분석
(1-1)은 미분을 통하여 주어진 함수의 점근선, 대칭성, 극값, 변곡점을 기술하고, 그래프의 개형을 그리는 것이다. (1-2)는 적분기법(치환적분법, 부분적분법)을 써서 정적분으로 주어진 함수를 구한 후 극한을 계산하는 것이다.

(나) 제시문 해설
멱함수 $f(x)=x^k(k \ge 0$ 는 실수)와 지수함수 $g(x)=e^x$ 는 x 가 한없이 커질 때 멱함수의 함수 값보다 지수함수의 함수 값이 더 빨리 커진다는 내용이다. (1-2)에서 극한을 계산할 때, 제시문의 결과를 이용하도록 제시문을 구성하였다.

(다) 제시문 출처
제시문 : 창작

3. 논제 해설
(1-1)은 함수 $f(x)=x^3e^{-x^2}$ 의 점근선, 대칭성, 극값, 변곡점을 기술하고 이러한 정보를 바탕으로 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리는 문제이다. (1-2)는 정적분으로 주어진 함수 $\int_0^t x^3e^{-x^2}dx$ 를 구한 후 $t \to \infty$ 일 때의 극한을 계산하는 문제이다.

4. 평가 기준
- 미적분을 이해하고 있는 정도
- 계산 능력 및 논리적인 답안 작성 능력

5. 예시 답안
(1-1)

(i) $y=x^3e^{-x^2}$ 는 기함수이므로 $x>0$ 에서만 그림을 그린 후 원점 대칭시킨다.

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = 0$ 이므로 $y = 0$ (x 축)은 수평점근선이다.

(iii) $y' = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$ 으로부터 $\begin{cases} 0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}} & \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y\text{는 증가함수} \\ x > \sqrt{\frac{3}{2}} & \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y\text{는 감소함수} \end{cases}$ 이고

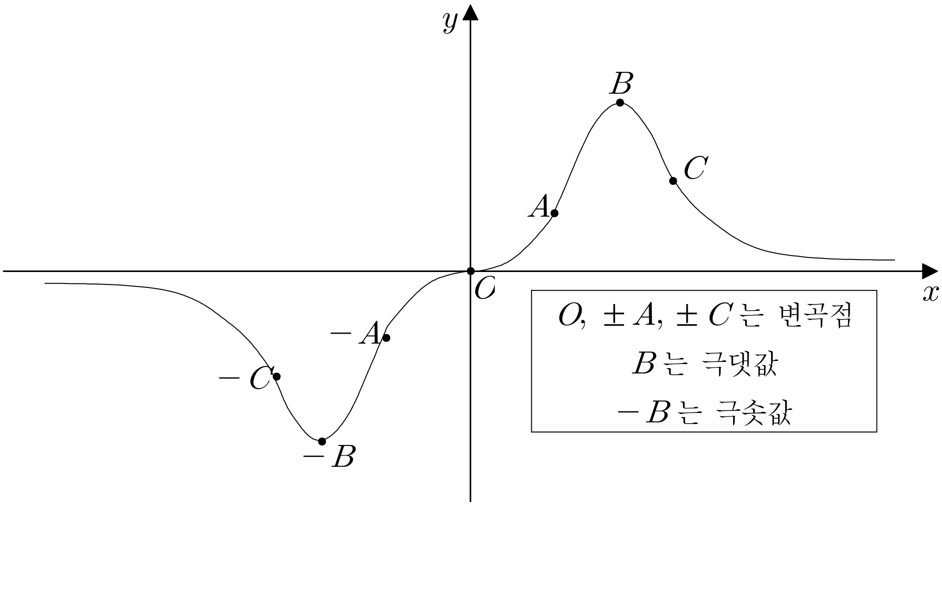
$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}$ 은 극댓값이고 $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}$ 은 극솟값이다.

(iv) $y'' = 2x(x^2 - 3)(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ 으로부터

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow y\text{는 아래로 볼록} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \sqrt{3} & \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow y\text{는 위로 볼록} \\ x > \sqrt{3} & \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow y\text{는 아래로 볼록} \end{cases}$$

이고 $(0, 0)$, $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $(\pm\sqrt{3}, \pm 3\sqrt{3}\, e^{-3})$은 변곡점이다.

이상을 종합하여 $y = x^3 e^{-x^2}$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(1-2)

$x^2 = \theta$ 로 치환하면 $x\,dx = \frac{1}{2}d\theta$ 이고,

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2}\int \theta\, e^{-\theta}\, d\theta \ \ (\text{부분적분법 사용}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\theta\, e^{-\theta} + \int e^{-\theta} d\theta\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\theta\, e^{-\theta} - e^{-\theta}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}\right\} + C\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 극한값은 제시문에 주어진 극한의 결과를 이용하면

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left[-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^2}{e^{t^2}} - \frac{1}{e^{t^2}} + 1\right) = \frac{1}{2}\,.$$

(별해) $$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2} dx &= \int\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\left(-2x\, e^{-x^2}\right) dx = \int\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \int x\, e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

이므로 제시문의 내용을 이용하면 다음의 극한 값을 얻는다.

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left[-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^2}{e^{t^2}} - \frac{1}{e^{t^2}} + 1\right) = \frac{1}{2}$$

[문제 2] (25점)

1. 출제의도
수열에서 점화식을 구하고 이를 푸는 능력을 측정한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설
(가) 주제 분석

주어진 상황을 이해하고 이를 바탕으로 수열이 변해가는 본질을 파악한다. 이것을 수식으로 표현하여 점화식을 구한 다음, 이 점화식을 푸는 문제이다.

(나) 제시문 해설

제시문을 주지 않았다.

(다) 제시문 출처

없음

3. 논제 해설
(2-1)은 주어진 상황을 이해하는가를 알아보는 단순한 문제이다. 이를 통하여 다음에 이어지는 (2-2)를 풀기 위한 준비를 한다. (2-2)는 (2-1)을 해결하는 경험을 통하여 이를 일반화하여 점화식을 구할 수 있는가를 알아보는 문제이다. 마지막으로 (2-3)은 위의 점화식을 푸는 문제로서, 특히 등비수열의 합을 계산할 수 있는지 알아본다.

4. 평가 기준
- 상황 파악 능력
- 점화식을 만드는 능력
- 점화식을 푸는 능력

5. 예시 답안
(2-1)

$A_3 = \left\{ \begin{matrix} (1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,4,4) \\ (3,1,1), (3,3,4), (3,4,3), (4,2,4), (4,3,3), (4,4,2) \end{matrix} \right\}$ 이므로 $a_3 = 12$ 이다.

(2-2)

$B_n = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \{1,2,3,4\}, x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 은 5의 배수가 아니다.$\}$

이라 놓고, b_n을 집합 B_n의 원소의 개수라 하면, $a_n + b_n = 4^n$, $a_n = b_{n-1}$이다. 따라서 $a_n + a_{n-1} = 4^{n-1}$이다.

(2-3)

(2-2)의 점화식으로부터

$$\begin{aligned} a_n &= 4^{n-1} - a_{n-1} \\ &= 4^{n-1} - 4^{n-2} + a_{n-2} = \cdots \\ &= 4^{n-1} - 4^{n-2} + 4^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-2} a_2 \\ &= 4^{n-1} - 4^{n-2} + 4^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-2} 4 \\ &= \frac{4^{n-1}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}(4^{n-1} - (-1)^{n-1}) \end{aligned}$$

[문제 3] (25점)

1. 출제의도

일차변환과 행렬의 이해도를 측정한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

(3-1)은 일차변환의 성질을 이해하고 행렬의 계산을 수행한다. (3-2)는 제시문 (다)의 의미를 이해하고 이를 이용하여 주어진 등식을 만족하는 상황을 찾는다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)와 (나)는 닮음변환, 회전변환, 합성변환의 교과서적인 정의이고, 제시문 (다)는 특정한 형태의 행렬의 집합이 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있다는 성질을 기술하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가)와 (나) :『기하와 벡터』교과서에서 발췌
제시문 (다) : 창작

3. 논제 해설

(3-1)은 간단한 행렬의 계산을 이용하거나 또는 일차변환이 좌표평면의 벡터에 작용하는 방법을 이용한 계산 문제이다. (3-2)는 제시문을 이용하여 행렬 $E+cA$가 $kP\,(k>0,$ P는 회전변환)의 꼴로 나타내진다는 사실을 파악하고, 이를 이용하여 주어진 등식을 만족하는 c의 값을 찾는 문제이다.

4. 평가 기준

- 제시문을 이해, 활용하는 능력
- 주어진 회전변환, 닮음변환의 기본성질의 이해도
- 행렬과 삼각함수 등에 관한 계산 능력
- 논리적인 답안 작성 능력

5. 예시 답안

(3-1)

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $(0<\theta<\pi)$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로 $E+A=\begin{pmatrix}1+\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & 1+\cos\theta\end{pmatrix}$이다.

제시문 (다)에 의해 $A, E \in T$ 이므로 $E+A \in T$ 이다. 따라서 $E+A = kP$ 로 표현할 수 있고,

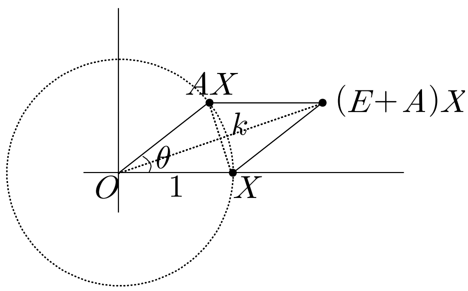
$$\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix},$$

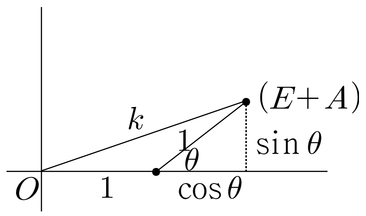
여기서 $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $0 < \alpha < \pi$ 이다. 따라서 연립방정식 $\begin{cases} 1+\cos\theta = k\cos\alpha \\ \sin\theta = k\sin\alpha \end{cases}$ 을 얻는다. 두 식을 제곱하여 변변 더하면

$$k^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2+2\cos\theta$$

$$\therefore\ k = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{4\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}\quad (\because\ k>0)$$

(별해) 변환 $E+A$ 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.





첫 번째 그림으로부터 닮음비 k 는 마름모에서 긴대각선의 길이이므로 $k = 2\cos\frac{\theta}{2}$ 이다.

또한 두 번째 그림으로부터 $k^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2+2\cos\theta$,‘

$$\therefore\ k = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{4\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}.$$

(3-2)

제시문 (다)에 의해 $E, cA \in T$ 이므로 $E+cA \in T$ 이다 따라서 (3-1)과 마찬가지로

$$\begin{pmatrix} 1+c\cos\theta & -c\sin\theta \\ c\sin\theta & 1+c\cos\alpha \end{pmatrix}^6 = (E+cA)^6 = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}^6,$$

여기서 k 는 양의 실수, $0 < \alpha < \pi$로 나타낼 수 있다. $\begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$k^6 = 1$ 이므로 $k = 1$ 이고, $6\alpha = 2\pi, 4\pi$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 이다. 또한 연립방정식

$$\begin{cases} 1+c\cos\theta = k\cos\alpha \\ c\sin\theta = k\sin\alpha \end{cases} \text{---①}$$

으로부터 두 식을 제곱하여 변변 더하면

$$1=(1+c\cos\theta)^2+c^2\sin^2\theta \iff \cos\theta=-\frac{c}{2}\text{ ---②}.$$

①의 첫 번째 식 $1+c\cos\theta=\cos\alpha$ 에 ②식을 대입하면 $c^2=2-2\cos\alpha$ 이다. 따라서

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ 일 때, $c^2=1 \Rightarrow c=1, \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 일 때, $c^2=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(별해1) $B=E+cA=\begin{pmatrix}1+c\cos\theta & -c\sin\theta \\ c\sin\theta & 1+c\cos\theta\end{pmatrix}$라 하면 케일리-해밀턴 공식에 의해

$B^2=xB-yE$, 여기서 $x=2(1+c\cos\theta)$---①, $y=c^2+2c\cos\theta+1$---②

이 성립한다. 문제의 조건식 $B^6=E$---③에 의해 양변 행렬의 행렬식이 같다. 즉, $y^6=1$ 이다. 따라서 $y=\pm 1$ 이다. $y=-1$ 이면 ②식에서 $\cos\theta=\frac{-2-c^2}{2c}=-\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{2}\right)<-\sqrt{2}$ 이므로 모순이다. 따라서 $y=1$ 이다. 즉 $c=-2\cos\theta$---④이다. 한편

$$\begin{aligned}B^4=B^2&=(xB-E)^2=x^2B^2-2xB+E=x^2(xB-E)-2xB+E\\&=(x^3-2x)B+(1-x^2)E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^6=B^4B^2&=\{(x^3-2x)B+(1-x^2)E\}(xB-E)\\&=(x^4-2x^2)B^2+(x(1-x^2)-(x^3-2x))B-(1-x^2)E\\&=(x^4-2x^2)(xB-E)+(3x-2x^3)B-(1-x^2)E\\&=(x^5-2x^3+3x-2x^3)B-(x^4-2x^2+1-x^2)E\\&=(x^5-4x^3+3x)B-(x^4-3x^2+1)E\end{aligned}$$

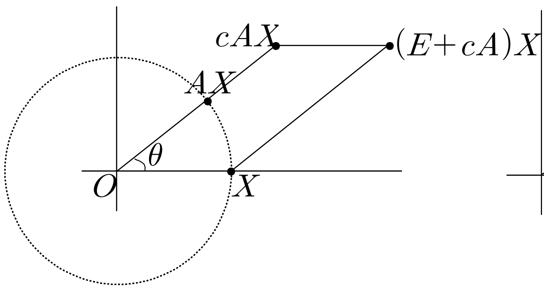
이므로 ③식에 의해 연립방정식

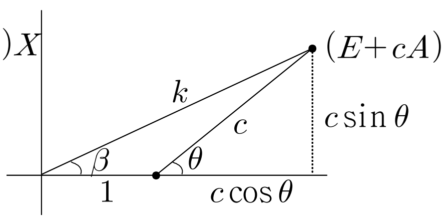
$$\begin{cases}x^5-4x^3+3x=x(x^4-4x^2+3)=x(x^2-1)(x^2-3)=0\\-(x^4-3x^2+1)\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;=1\end{cases}$$

이 성립한다. 첫 번째 식에서 $x=0, x^2=1, x^2=3$ 이고 이들 중 두 번째 식을 만족하는 x 는 $x^2=1$ 뿐이다. 따라서 ①식은 $1+c\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$---⑤이다. ④식을 ⑤식에 대입하여 정리하면

$$1+c\left(-\frac{c}{2}\right)=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow 2-c^2=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases}c=1, & \cos\theta=-\frac{1}{2}\\ c=\sqrt{3}, & \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

(별해2) 변환 $E+cA$ 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.





여기서 $k>0$는 닮음비이고 β는 어떤 회전변환의 회전각이다. 그런데, 등식 $(E+cA)^6=E$이 성립하므로 닮음비는 1, 즉 $k=1$이다. 또한 회전각 β는 $6\beta=2n\pi$ (n은 정수)이다. $0<\beta<\pi$이므로 $\beta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$이다. 두 번째 그림에서

$$(k^2=)1=(1+c\cos\theta)^2+(c\sin\theta)^2$$

으로부터 $c=-2\cos\theta$ ---①을 얻는다. 또한 코사인 제2법칙으로부터

$$c^2=1+1-2\cos\beta=2-2\cos\beta=\begin{cases}1 & (\beta=\frac{\pi}{3})\\ 3 & (\beta=\frac{2\pi}{3})\end{cases}$$

을 얻는다. 따라서 양수 c의 값과 $\cos\theta$는 다음과 같다. $c=1,\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$이고

$$c=\sqrt{3},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 이다.

[문제 4] (25점)

1. 출제의도

(1) $n!$이 n이 커짐에 따라 매우 빨리 커짐을 실감하게 한다.
(2) 로그함수, 적분 등을 활용하는 능력을 측정한다.
(3) 논리적 서술 능력을 측정한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

(4-1)은 부분적분법을 써서 적분 계산을 하는 것이다. (4-2)는 자연로그함수의 증가성과 (4-1)의 결과를 이용하여 지수함수보다 $n!$이 훨씬 빠르게 커진다는 것을 보이는 것이다. (4-3)은 $0<t<1$이면 n^{tn}도 $n!$ 보다는 증가속도가 느리다는 것을 보이는 것으로, 문제가 묻는 바를 이해하고 무엇을 보여야 하는지를 인지하는 논리적 사고를 묻는 문제이다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 문제를 푸는데 필요한 $\ln 2, \ln 5$의 값을 알려주는 것이고, 제시문 (나)는 자연로그함수 $\ln x$가 증가함수라는 사실을 서술한 것으로 (4-2)와 (4-3)을 푸는 데 활용하라는 암시를 준 것이다.

(다) 제시문 출처 :

제시문 (가) : 공학용 계산기

제시문 (나) :『수학 II』교과서에서 발췌

3. 논제 해설

(4-1)은 부분적분을 이용한 적분 계산으로, 학생들에게 잘 알려진 기본적인 적분 계산이다.
(4-2)는 자연로그를 취한 후 함수 $\ln x$가 증가함수라는 성질을 이용하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k > \int_1^n \ln x \, dx$$

를 생각해 내는 것이 관건이다. (4-3)은 우선 문제가 묻는 바를 이해하고 어떤 계산을 해내야 하는 지를 판다하는 것이 필요하고, 그 이후의 계산과정은 (4-2)와 유사하다 할 수 있다.

4. 평가 기준

- 기본적인 적분 계산 능력
- 논리적, 수학적 사고 능력
- 적분의 올바른 이해와 활용 능력

5. 예시 답안

(4-1)

$$\int \ln x \, dx = \int \left(\frac{d}{dx} x\right) \ln x = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

(4-2)

$$\ln 2^{1200} = 1200 \ln 2 < 840 \quad (\because \text{제시문(가)})$$

$$\ln 200! = \sum_{k=1}^{200} \ln k > \int_1^{200} \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^{200} = (200 \ln 200 - 200) + 1$$

한편 $200 = 25 \times 8 = 5^2 \times 2^3$ 이므로 $\ln 200 = 2 \ln 5 + 3 \ln 2 > 3.2 + 2.07 > 5.2$ ($\because$ 제시문

(가))이다. 그러므로 $\ln 200! > 1040 - 199 = 841$ 이다.

$\therefore \ln 2^{1200} < \ln 200!$ $\quad \therefore 2^{1200} < 200!$

(4-3)

$t \le 0$ 일 때는 $n^{tn} < n!$ 이고, $t \ge 1$ 일 때 $n^{tn} \ge n!$ 이 성립함은 자명하다. $0 < t < 1$ 일 때, n 이 커짐에 따라 n^{tn} 이 결국 $n!$ 보다 작게 됨을 보이자. (그러면 구하는 최솟값은 1 이 된다.)

$$\ln n^{tn} = tn \ln n \text{ ---①}$$

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k > \int_1^n \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^n = n(\ln n - 1) + 1 \text{ ---②}$$

n 이 커짐에 따라 ②−①이 0 보다 커짐을 보이면 된다.

$$②-① = n(\ln n - 1) + 1 - tn\ln n = n(\ln n - t\ln n - 1) + 1$$

그런데, $\ln n - t\ln n - 1 = (1-t)\ln n - 1$ 이고 $1 - t > 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ 이므로 n 이 커짐에 따라

$$\ln n - t\ln n - 1 > 0 \;(\text{또는 } \lim_{n\to\infty}(\ln n - t\ln n - 1) = \infty)$$

이므로 n 이 커짐에 따라 $n!$ 은 n^{tn} 보다 크다.