샘플강좌①: 소거법

제 1 장　일차연립방정식과 행렬

Thm (1): 소거법

① $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+l\cdot y=p' \\ \qquad\ \ y=q' \end{cases}$ 후진대입

② $\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=p \\ b_1x+b_2y+b_3z=q \\ c_1x+c_2y+c_3z=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+a_2{}'y+a_3{}'z=p' \\ \qquad\ y+b_3{}'z=q' \\ \qquad\qquad\ \ z=r' \end{cases}$ 후진대입

③ $$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=p_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=p_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=p_n \end{matrix} = \begin{cases} x_1+a_{12}{}'x_2+\cdots+a_{1n}{}'x_n=p_1{}' \\ \qquad\quad x_2+\cdots+a_{2n}{}'x_n=p_2{}' \\ \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n=p_n{}' \end{cases}$$ 후진대입

예제 1

$\begin{cases} 3x+y=4 \\ x+y=8 \end{cases}$ 소거법으로 풀어라.

예제 2

$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ 소거법으로 풀어라.

예제 3

$$\begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ 4x-3y+2z=7 \\ \quad\quad x+3z=10 \end{cases}$$ 소거법으로 풀어라.

Thm (2) : 해의 형태

(1) $\begin{cases} x+l_1y+l_2z=p \\ y+mz=q \\ z=r \end{cases}$ ➡ 유일한 해

(2) $\begin{cases} x+l_1y+l_2z=p \\ y+mz=q \\ 0=0 \end{cases}$ ➡ 해가 무수히 多
(3차원 공간 직선(두 평면의 교선))

(3) $\begin{cases} x+l_1y+l_2z=p \\ y+mz=q \\ 3=r \end{cases}$ ➡ 해가 존재하지 않는다.

제 2 장 행 렬 식

Def (13): 소행렬식과 여인수

$n\times n$ 행렬 A의 i행과 j열을 제외시킨 부분행렬의 행렬식을 M_{ij}라 쓰고 행렬 A의 성분 a_{ij}의 **소행렬식(minor of entry** a_{ij}**)**라 한다.

또, 수 $c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$를 성분 a_{ij}의 **여인수(cofactor of entry** a_{ij}**)**라 한다.

㉮ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대해

Def (14): 3×3 행렬식의 정의

$$\det(A)=|A|=a_{11}M_{11}+a_{12}(-M_{12})+a_{13}M_{13}$$
$$=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$$

예제 29

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$의 $|A|$를 구하여라.

Thm (19) : 여인수 전개

$n\times n$ 행렬 A의 행렬식은 어떤 하나의 행의 성분과 그 성분에 대한 여인수의 곱을 몽땅 더한 것이다.
(또는 하나의 열에 대해 같은 방법으로 해도 됨)

$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ (i 행에 대한 여인수 전개)

$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$ (j 열에 대한 여인수 전개)

예제 30

다음 행렬을 열에 대한 여인수전개로 $\det(A)$를 구하여라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

예제 31

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def (15) : 수반행렬(adjoint of A)

$n \times n$ 행렬 A의 a_{ij} 성분의 여인수를 C_{ij} 라 할 때

A의 **여인수 행렬** $=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$

$\mathrm{adj}\,(A)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^T$ 를 A의 **수반행렬**이라 한다.

예제 32

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$의 수반행렬을 구하여라.