



자 연 계 열 (2)

성명		지원 학부·학과		수험 번호															
----	--	----------	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

유의 사항

1. 75분 안에 답안을 작성하십시오.
2. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하십시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
 - 1) 답안지를 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하지 않은 경우
 - 2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
 - 3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 좌표평면 위의 일차변환 $h: (x, y) \rightarrow (x', y')$ 를 나타내는 식이

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{는 상수})$$

로 주어졌을 때, 일차변환 h 를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 이다.

<나> 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 를 원점 O 를 중심으로 각 α 만큼 회전하여 점 $P'(x', y')$ 로 옮기는 변환을 각 α 만큼 회전하는 회전변환이라 한다. 회전변환은 일차변환이고, 이를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ 이다. 점 $P(x, y)$ 를 원점을 지나는 어떤 직선에 대하여 대칭인 점 $P'(x', y')$ 로 옮기는 대칭변환도 일차변환이다. 특히 x 축과 y 축에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬은 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 과 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

1. 다음의 조건 (1)과 (2)를 모두 만족시키는 일차변환에 의해 점 $(3, 2)$ 가 옮겨질 수 있는 점을 모두 구하시오.

(1) 일차변환에 의하여 점 $(2, 1)$ 이 점 $(1, 2)$ 로 옮겨진다.

(2) 일차변환에 의하여 좌표평면 위의 임의의 점 A 가 점 B 로 옮겨질 때, 항상 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 가 성립한다.

2. 원점을 지나고 기울기가 $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$ 인 세 직선에 대한 대칭변환을 각각 $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ 라 할 때, 합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta$ 와 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$ 를 나타내는 행렬을 각각 구하고 어떤 일차변환인지 설명하시오.

3. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 5, a_2 = 9$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 1$ 을 만족시키는 수열이다. 원점을 지나고 기울기가 $\tan \frac{a_n \pi}{12}$ 인 직선에 대한 대칭변환을 f_n 이라 할 때, 합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{2014}$ 는 어떤 일차변환인지 설명하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 중간값의 정리는 다음과 같다.

함수 $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $g(a) \neq g(b)$ 일 때, $g(a)$ 와 $g(b)$ 사이의 임의의 실수 r 에 대하여 $g(c) = r$ 인 실수 c 가 열린 구간 (a, b) 에서 적어도 하나 존재한다.

<나> 평균값의 정리는 다음과 같다.

함수 $h(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하면,

$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$ 인 실수 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

<다> 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- ① 함수 $f(x)$ 는 미분가능하고, 도함수 $f'(x)$ 가 연속이다.
- ② $f(0) = 0, f(1) = 1$ 이다.

1. 제시문 <다>의 조건과 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

2. 함수 $f(x)$ 가 제시문 <다>의 조건을 만족시키면, $\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2$ 이고 $0 \leq c_1 < c_2 \leq 1$ 인 c_1, c_2 가 존재함을 보이시오.

3. 함수 $f(x)$ 가 제시문 <다>의 조건을 만족시키면, 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{f'(c_1)} + \dots + \frac{1}{f'(c_n)} = n$ 이고 $0 \leq c_1 < \dots < c_n \leq 1$ 인 c_1, \dots, c_n 이 존재함을 보이시오.