(홀수형)

2007학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$$(\log_3 27)\times 8^{\frac{1}{3}} = \log_3 3^3 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 3\times 2 = 6$$

답 ④

2.

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 이므로

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{4-3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$4-1-3+1=1$$

답 ①

3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x+3}+2)$$

$$=(1+1)(\sqrt{1+3}+2)=2\times 4=8$$

답 ②

4.

$x(x-4)(x-5)\geq 0$ 에서

$$0\leq x\leq 4 \text{ 또는 } x\geq 5 \cdots ㉠$$

$\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}\leq 0$ 에서

$(x-1)(x-2)(x-3)\leqq 0$ (단, $x\neq 1$, $x\neq 2$)

$$\therefore\ x<1 \text{ 또는 } 2<x\leq 3 \cdots ㉡$$

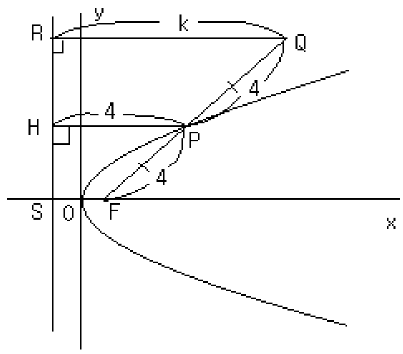
㉠, ㉡의 공통범위는

$$0\leq x<1 \text{ 또는 } 2<x\leq 3$$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 0, 3의 2이다.

답 ②

5.



포물선 $y^2=x$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{4},0\right)$이고,

준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$ 이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해

$$\overline{PF}=\overline{PH}=4$$

점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 R, 준선과 x축의 교점을 S라 하면 사각형 $FQRS$는 등변사다리꼴이다.

이 때, $\overline{\mathrm{QR}}=k$라 하면 두 점 P, H는 각각 두 선분 $\overline{\mathrm{FQ}}$, $\overline{\mathrm{SR}}$의 중점이고, $\overline{\mathrm{FS}}=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{k+\frac{1}{2}}{2}=4 \quad \therefore\ k=\frac{15}{2}$$

따라서 점 Q의 x좌표는

$$\frac{15}{2}-\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$$

답 ①

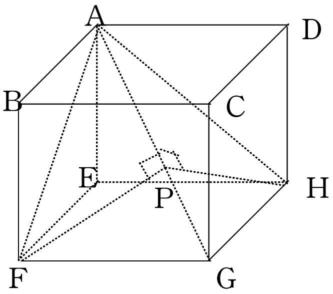
6.

선분 FG는 평면 ABFE와 수직이므로

$$\overline{AF} \perp \overline{FG}$$

또, 선분 HG는 평면 AEHD와 수직이므로

$$\overline{AH} \perp \overline{HG}$$



따라서 정육면체의 한 모서리의 길이를 1이라 하고, 점 F에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 P라 하면 직각삼각형 AFG의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{FG} = \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{FP}$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \overline{FP}$$

$$\therefore \quad \overline{FP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

그런데, 두 직각삼각형 AFG, AHG는 합동이므로 점 H에서 선분 AG에 내린 수선의 발도 P이고, $\overline{HP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 두 평면 AFG, AHG가 이루는 각의 크기는 두 선분 FP, HP가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{FH} = \sqrt{2}$ 이므로 삼각형 FHP에서 제이코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \left| \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \right| = \frac{1}{2}$$

$$(\because \ 0 \le \theta < 90°)$$

$$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

답 ③

다른 풀이

점 E를 원점으로 하고, 직선 EF를 x축, 직선 EH를 y축, 직선 EA를 z축으로 하는 좌표공간을 설정하자.

세 점 A$(0,0,1)$, $F(1,0,0)$, $G(1,1,0)$을 지나는 평면의 방정식은 $x+z=1$이고,

세 점 A$(0,0,1)$, H$(0,1,0)$, G$(1,1,0)$을 지나는 평면의 방정식은 $y+z=1$이다.

이 때, 두 평면 AFG, AHG가 이루는 각의 크기는 두 평면의 법선벡터 $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$이 이루는 각 중 예각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

7.

ㄱ. $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-0}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3-1}{x-1}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to 1+0}(x^2+x+1) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

$$\therefore \quad f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. $|f(0)|=1$이다.

$x<0$일 때 $f(x)>0$이므로

$|f(x)| = f(x) = 1-x$

$\therefore$

$$\lim_{x\to -0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{(1-x)-1}{x}=-1$$

$0<x<1$일 때 $f(x)<0$이므로

$|f(x)|=-f(x)=1-x^2$

$$\therefore \lim_{x\to +0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{(1-x^2)-1}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to -0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}\neq\lim_{x\to +0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$$

따라서 $|f(0)|'=\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$의 값이 존재하지 않으므로 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. (i) $k=1$일 때 $g(x)=xf(x)$라 하면 $g(0)=0$이다.

$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{x(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to -0}(1-x)=1$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{x(x^2-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to +0}(x^2-1)=-1$$

따라서 $\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

이므로 $g(x)=xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $k=2$일 때 $h(x)=x^2f(x)$라 하면 $h(0)=0$이다.

$$\lim_{x\to -0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{x^2(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to -0}x(1-x)=0$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{x^2(x^2-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to +0}x(x^2-1)=0$$

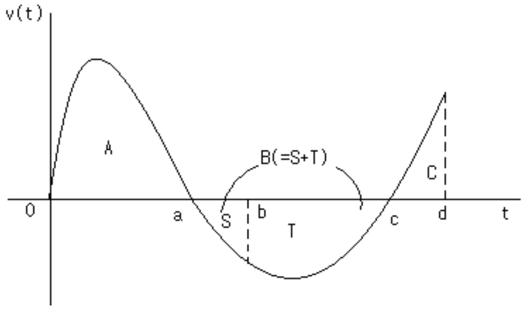
따라서 $h'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$ 이므로 $h(x)=x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

그러므로 $x^kf(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

8.



곡선 $y=v(t)$와 세 구간 $[0,a]$, $[a,c]$, $[c,d]$에서 x축과 둘러싸인 세 부분의 넓이를 각각 A, B, C라 하면

$\int_0^a|v(t)|dt=A$, $\int_a^c|v(t)|dt=B$,

$\int_c^d|v(t)|dt=C$

이 때,

$$\int_0^a|v(t)|dt=\int_a^d|v(t)|dt=\int_a^c|v(t)|dt+\int_c^d|v(t)|dt$$

이므로

$$A=B+C\ \cdots\ ㉠$$

ㄱ. 점 P는

$0\le t\le a$일 때 A만큼의 거리를 수직선의 양의 방향으로 움직였다가

$a\le t\le c$일 때 B만큼의 거리를 수직선의 음의 방향으로 움직이고

$c\le t\le d$일 때 C만큼의 거리를 수직선의 양의 방향으로 움직인다.

그런데, ㉠에서 $A>B$이므로 점 P는 $0<t\le d$일 때 원점을 다시 지나지 않는다.

(거짓)

ㄴ. $\int_0^a v(t)dt = \int_0^a |v(t)|dt = A$,

$\int_a^c v(t)dt = -\int_a^c |v(t)|dt = -B$이므로

$\int_0^c v(t)dt = \int_0^a v(t)dt + \int_a^c v(t)dt = A - B$

이 때, $\int_c^d v(t)dt = \int_c^d |v(t)|dt = C$이므로 ㉠

에서 $A - B = C$이므로

$$\int_0^c v(t)dt = \int_c^d v(t)dt \text{ (참)}$$

ㄷ. $\int_a^b |v(t)|dt = S$, $\int_b^c |v(t)|dt = T$라 하면

$\int_0^b v(t)dt = A - S$, $\int_b^d |v(t)|dt = T + C$

그런데, $S + T = B$, $A = B + C$이므로

$A - S = A - (B - T) = A - B + T = C + T$

따라서 $a \le b \le c$인 임의의 실수 b에 대하여

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^d |v(t)|dt$이 항상 성립한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

9.

$0 < r < 1$이면 $f(r) = 0$

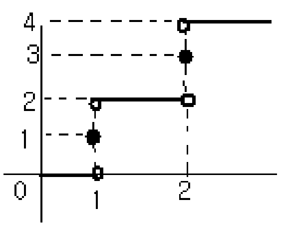
$r = 1$이면 $f(r) = 1$

$1 < r < 2$이면 $f(r) = 2$

$r = 2$이면 $f(r) = 3$

$r > 2$이면 $f(r) = 4$

따라서 함수 $f(r)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $f(2) = 3$ (참)

ㄴ. $\lim_{r \to 1+0} f(r) = 2 \ne 1 = f(1)$ (거짓)

ㄷ. 함수 $f(r)$은 $r = 1$일 때와 $r = 2$일 때 불연속이므로 구간 $(0, 4)$에서 불연속점의 개수는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

10.

표본의 크기 100이 충분이 크므로 모표준편차 σ는 표본표준편차로 대신할 수 있다.

즉, $\sigma = 20$, $n = 100$이고 표본평균이 $\overline{X} = 245$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$에서

$$\left[245 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}},\ 245 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\therefore [241.08,\ 248.92]$$

따라서 이 신뢰구간에 속하는 정수는 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248의 7개다.

답 ③

11.

$I(t) = 10 + 990 \times a^{-5t}$에 $I(t) = 21$을 대입하면

$21 = 10 + 990 \times a^{-5t}$이므로 $a^{-5t} = \frac{11}{990}$

$\therefore\ a^{5t} = \frac{990}{11} = 90$

$\therefore\ 5t = \log_a 90 = \frac{\log 9 \times 10}{\log a} = \frac{2\log 3 + 1}{\log a}$

$\therefore\ t = s = \frac{1 + 2\log 3}{5\log a}$

답 ①

12.

ㄱ. $B^2=B$의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$B^{-1}B^2=B^{-1}B$

$\therefore\ B=E$ (참)

ㄴ. $(E-A)^2=E-2A+A^2$

$=E-2A+E=2(E-A)$

$(E-A)^3=(E-A)^2(E-A)=\{2(E-A)\}(E-A)$

$=2(E-A)^2=2^2(E-A)$

…

$\therefore\ (E-A)^n=2^{n-1}(E-A)$

$\therefore\ (E-A)^5=2^4(E-A)$ (참)

ㄷ. $(E-ABA)^2=E-2ABA+(ABA)^2$

이 때,

$(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=ABEBA=AB^2A=ABA$이므로

$(E-ABA)^2=E-2ABA+ABA=E-ABA$

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13.

$A(n)=\{x|\ 0<x\leq 2^n\}$, $B(n)=\{x|\ 0<x\leq 4^n\}$

이다.

ㄱ. $2^1=2$이므로

$A(1)=\{x|\ 0<x\leq 2\}$ (거짓)

ㄴ. $2^4=4^2$이므로

$A(4)=B(2)=\{x|\ 0<x\leq 16\}$ (참)

ㄷ. $A(n)\subset B(n)$이면 $0<2^n\leq 4^n$이므로

$2^{-n}\geqq 4^{-n}>0$이다.

$\therefore\ B(-n)\subset A(-n)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14.

3개의 상자 A, B, C에 서로 다른 5개의 공을 임의로 넣는 경우의 수는

$_3\Pi_5=3^5=243$

이 때, 상자에 있는 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 상자는 많아야 1개이므로 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 경우가 존재하려면 세 상자 중 어느 한 상자에는 3, 4, 5가 적힌 공은 반드시 들어가고 또한, 이 상자에 1, 2가 적힌 공 중 적어도 하나가 들어가야 한다.

따라서 이 경우의 수는

$_3C_1\times({}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2)=3(9-4)=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$243-15=228$

답 ②

다른 풀이

3개의 상자 A, B, C에 서로 다른 5개의 공을 임의로 넣는 경우의 수는

$_3\Pi_5=3^5=243$

이 때, 상자에 있는 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 상자가 존재하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 세 상자 중 어느 한 상자에 1, 3, 4, 5가 들어가고 2는 나머지 두 상자 중 어느 하나에 들어가는 경우의 수는

$3\times2=6$ (가지)

(ii) 세 상자 중 어느 한 상자에 2, 3, 4, 5가 들어가고 1은 나머지 두 상자 중 어느 하나에 들어가는 경우의 수는

$3\times2=6$ (가지)

(iii) 세 상자 중 어느 한 상자에 1, 2, 3, 4, 5가 들어가는 경우의 수는

3 (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$243-(6+6+3)=228$

15.

$3n$장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$이다.

$a=k \quad (k=1,2,3,\cdots,n-1)$이면 $3a<b$를 만족시키는 b는 $3k+1, 3k+2, \cdots, 3n$중의 하나이어야 하므로 b의 경우의 수는 $3n-3k=3(n-k)$ 이다.

$$\therefore \quad \mathrm{P}_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(n-k)}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$$

이 때,

$$\sum_{k=1}^{n-1}3(n-k)$$

$=3n(n-1)-\frac{3}{2}n(n-1)=\frac{3}{2}n(n-1)$ 이므로

$$\mathrm{P}_n=\frac{\frac{3}{2}n(n-1)}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$$

이 때, ${}_{3n}\mathrm{C}_2=\frac{3n(3n-1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2-3n}{2}}{\frac{9n^2-3n}{2}}=\frac{1}{3}$$

이상에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은

$$3(n-k),\ \frac{3}{2}n(n-1),\ \frac{1}{3}$$

이다.

답 ①

16.

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 정사각형 A_n과 만날 필요충분조건은 두 점 $(4n^2,\ n^2)$, $(n^2,\ 4n^2)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만날 때이다.

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(4n^2,\ n^2)$을 지날 조건은

$$n^2=k\sqrt{4n^2} \qquad \therefore \ k=\frac{n}{2}$$

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(n^2,\ 4n^2)$을 지날 조건은

$$4n^2=k\sqrt{n^2} \qquad \therefore \ k=4n$$

따라서 a_n은 부등식 $\frac{n}{2}\leq k\leq 4n$을 만족하는 자연수 k의 개수이다.

(i) n이 홀수일 때

$$a_n=4n-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+1=\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$$

(ii) n이 짝수일 때

$$a_n=4n-\frac{n}{2}+1=\frac{7}{2}n+1$$

$$\therefore \ a_n=\begin{cases}\frac{7}{2}n+\frac{1}{2} & (n\text{이 홀수})\\ \frac{7}{2}n+1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

ㄱ. $a_5=\frac{7}{2}\times 5+\frac{1}{2}=18$ (거짓)

ㄴ.

$$a_{n+2}=\begin{cases}\frac{7}{2}(n+2)+\frac{1}{2}=a_n+7 & (n\text{이 홀수})\\ \frac{7}{2}(n+2)+1=a_n+7 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

$$\therefore \ a_{n+2}-a_n=7 \text{ (참)}$$

ㄷ.

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_9+a_{10})$$

$=12+(12+14)+(12+2\times 14)+\cdots+(12+4\times 14)$

$=\frac{5}{2}\{12+(12+56)\}=200$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

17.

R_1의 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 빗변의 길이는 $3a$이므로 $3a=\sqrt{2}$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore\ S_1=a^2=\frac{2}{9}$$

R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 R_1에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_1에서 새로 색칠한 2개의 정사각형의 넓이의 합은 $2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2$이다.

$$\therefore\ S_2=S_1+2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{4}{9}$$

R_2에서 합동인 2^2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$ 이므로 R_2에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_2에서 새로 색칠한 2^2개의 정사각형의 넓이의 합은

$2^2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{9}\right)^2=4\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{2}{9}\right)^2$이다.

$$\therefore\ S_3=S_2+\frac{2}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$\cdots$

이와 같은 방법으로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합과 같음을 추론할 수 있다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}$$

답 ⑤

18.

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$이므로 $x=a$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a=4$ 이어야 한다.

따라서 $a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3=0$ 에서

$a=1$

$\therefore\ b=f(1)=7$

$\therefore\ a^2+b^2=1^2+7^2=50$

답 50

19.

$\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=1-2a+a\quad\therefore\ a=1$$

또, $\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4ax+a=3x^2-4x+1$

$(\because\ a=1)$

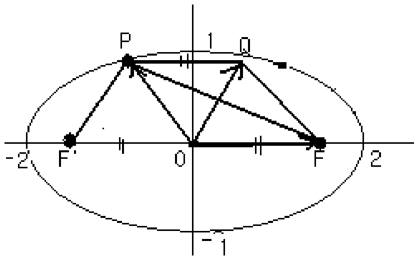
$$\therefore\ f(3)=27-12+1=16$$

답 16

20.

장축의 길이가 $2\times2=4$이므로 타원의 정의에 의해

$$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=4$$



$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OQ}$라 하면 위의 그림에서 사각형 OFQP가 평행사변형이다.

$\therefore\ |\overline{OQ}|=1$

이 때, $\overline{OF'}=\overline{OF}=\overline{PQ}$이고 $\overline{OF'}//\overline{PQ}$이므로 사각형 $PF'OQ$도 평행사변형이다.

$\therefore\ \overline{PF'}=\overline{OQ}=1$

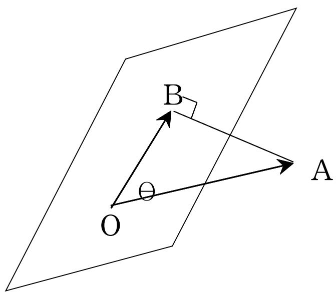
$\therefore\ \overline{PF}=(\overline{PF}+\overline{PF'})-\overline{PF'}=4-1=3$

$=k$

$\therefore\ 5k=15$

답 15

21.



원점 O는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}$는 서로 수직이다.

점 $A(3,6,0)$과 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 6-0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

이고, $\overline{OA}=\sqrt{3^2+6^2+0^2}=3\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 OAB에서

$$\overline{OB}=\sqrt{45-27}=3\sqrt{2}$$

그런데, $\angle AOB=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ 이므로

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\theta$$

$$=\overline{OB}^2=(3\sqrt{2})^2=18$$

답 18

다른 풀이

점 $A(3,6,0)$을 지나고 평면 $\sqrt{3}y-z=0$의 법선벡터 $\vec{v}=(0,\sqrt{3},-1)$과 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{y-6}{\sqrt{3}}=\frac{z}{-1},\ x=3$$

이 때, $\dfrac{y-6}{\sqrt{3}}=\dfrac{z}{-1}=t$라 하면 점 B의 좌표는 $(3,\ \sqrt{3}t+6,-t)$로 나타낼 수 있다. 점 B는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위의 점이어야 하므로

$3t+6\sqrt{3}+t=0\ \ \therefore\ t=-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

따라서 점 A에서 평면에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $B\left(3,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(3,6,0)\cdot\left(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$=9+9=18$$

22.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d ($d\neq 0$)라 하면

$$a_n=(n-1)d\ \ \therefore\ a_{n+1}=dn$$

이 때,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}d(k-1)$$

$=d\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=d\times\frac{n(n-1)}{2}$ 이고,

$a_{n+1}b_n = dn \cdot b_n = \dfrac{dn(n-1)}{2}$ 이어야 하므로

$$b_n = \frac{n-1}{2} \quad (\text{단, } n=1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore \; b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$$

답 13

23.
점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y, z)$라 하면

$\mathrm{Q}(x, y, 0)$, $\mathrm{R}(0, y, z)$, $\mathrm{S}(x, 0, z)$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = z$, $\overline{\mathrm{PR}} = x$, $\overline{\mathrm{PS}} = y$이다.

이 때, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$이므로

$$\triangle \mathrm{PRS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{PR}} \cdot \overline{\mathrm{PS}} = \frac{1}{2}xy$$

따라서 사면체 PQRS의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3} \triangle \mathrm{PRS} \cdot \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{6}xyz$$

그런데, $\overline{\mathrm{QR}} = \sqrt{z^2+x^2}$, $\overline{\mathrm{QS}} = \sqrt{z^2+y^2}$이고, $\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{QS}}$이어야 하므로

$$x = y$$

이 때, $x+2y+2z=54$에서

$2z = 54 - x - 2y = 54 - 3x$이므로

$$V = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6}x^2z = \frac{1}{12}x^2(54-3x)$$
$$= \frac{1}{4}(-x^3+18x^2)$$

이 때, $\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{1}{4}(-3x^2+36x) = 0$에서

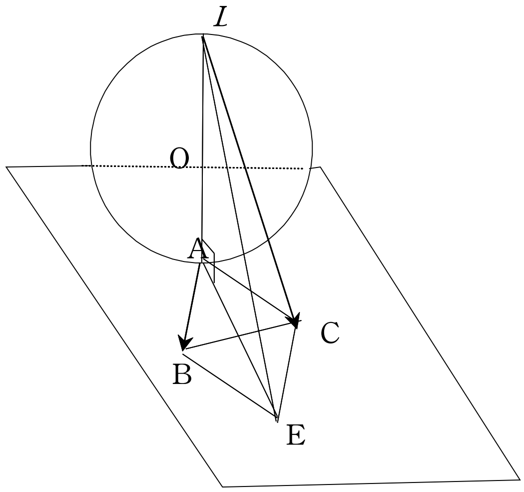
$$x = 12 \quad (\because \; x \neq 0)$$

$x < 12$일 때 $\dfrac{dV}{dx} > 0$이고, $x > 12$일 때 $\dfrac{dV}{dx} < 0$이므로 V는 $x=12$에서 극대이면서 최대이다. 따라서 구하는 사면체 PQRS의 부피의 최소값은

$$V = \frac{1}{4}(-12^3 + 18 \times 12^2)$$
$$= 36(-12+18) = 36 \times 6 = 216$$

답 216

24.



그림과 같이 두 선분 AB, AC를 두 변으로 하는 평행사변형의 또 다른 꼭지점을 E라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CE}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

선분 AD는 구의 중심을 지나므로 선분 AD는 구의 지름이고, $\overline{\mathrm{AR}} = 2 \times 2 = 4$이다.

또, $\overline{\mathrm{AD}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{AE}}$이고,

$\overline{\mathrm{AE}} = 2 \times \dfrac{3}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$이다.

따라서 직각삼각형 DAE에서

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2 = 4^2 + (3\sqrt{3})^2 = \sqrt{43}$$

$$\therefore \; |\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = \overline{\mathrm{DE}}^2 = 43$$

답 43

25.
점 P의 x좌표를 α라 하면

$$k \cdot 3^{\alpha} = 3^{-\alpha}$$

따라서 $k \cdot 3^{\alpha} = \frac{1}{3^{\alpha}}$ 이므로 양변에 3^{α}을 곱하여 정리하면

$$(3^{\alpha})^2 = 3^{2\alpha} = \frac{1}{k}$$

이 때, 점 Q의 x좌표는 2α이므로

$$k \cdot 3^{2\alpha} = -4 \cdot 3^{2\alpha} + 8$$

이 때, $3^{2\alpha} = \frac{1}{k}$ 이므로

$$k \cdot \frac{1}{k} = -4 \cdot \frac{1}{k} + 8$$

$k > 0$ 이므로 $1 = -\frac{4}{k} + 8$

$$\therefore\ k = \frac{4}{7}$$

$$\therefore\ 35k = 20$$

답 20

미분과 적분

26.

$x \to a$일 때 (분모) $\to 3\sin 0 = 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $2^a - 1 = 0$ 이어야 하므로 $a = 0$

$\therefore$ (주어진 식) $= \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{3\sin x}$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 \times \ln 2 = b \ln 2$$

$\therefore \ b = \frac{1}{3}$

$\therefore \ a + b = \frac{1}{3}$

답 ④

27.

$\ln x = t$로 치환하면

$x = 1$일 때 $t = 0$, $x = a$일 때 $t = \ln a$이고,

$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(a) = \int_0^{\ln a} \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\ln a} = \frac{2}{3} (\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$\therefore \ f(a^4) = \frac{2}{3} (\ln a^4)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (4 \ln a)^{\frac{3}{2}}$

$$= 4^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{2}{3} (\ln a)^{\frac{3}{2}} \right\} = 8 f(a)$$

답 ②

28.

직각삼각형 OQ_1P_1의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2} \times 1 \times \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{4}$$

$\therefore \ \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}$

따라서 $\angle Q_1OP_1 = \Theta$라 하면

$$\tan\Theta = \frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \ \tan(\angle Q_1OP_2) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \Theta \right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\Theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan\Theta} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{2}} = 3$$

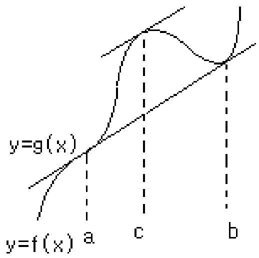
따라서 직각삼각형 P_2OQ_2에서

$$\overline{P_2Q_2} = \overline{OP_2} \times \tan\left(\frac{\pi}{4} + \Theta \right) = 1 \times 3 = 3$$

$\therefore \ \triangle P_2OQ_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$

답 ③

29.



$h(x) = f(x) - g(x)$이므로 $h(x)$는 미분가능하고, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x = b$에서 접하므로

$$f(b) = g(b), \ f'(b) = g'(b)$$

$\therefore \ h'(b) = f'(b) - g'(b) = 0$ (참)

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x = a$에서 접하므로

$$f(a) = g(a), \ f'(a) = g'(a)$$

$\therefore\ h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$

한편, 모든 실수의 구간에서 함수 $h(x)$는 미분가능한 함수이고 $h(a)=h(b)=0$ 이므로 평균값의 정리(롤의 정리)에 의하여 $h'(c)=0$을 만족하는 실수 c가 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 방정식 $h'(x)=0$은 적어도 $x=a, b, c$의 3개의 근을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x)$는 일차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $g''(x)=0$이다.

$\therefore\ h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)$

그런데, 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $f''(a)=0$이고, $f'''(x)\neq0$이다.

$\therefore\ h''(a)=0,\ g'''(a)\neq0$

따라서 점 $(a, h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30.

선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$S=$(반원의 넓이)$+$(2개의 부채꼴의 넓이)$+$(이등변삼각형의 넓이)

$=\frac{1}{2}\pi+2\times\frac{1}{2}\times1^2\times\theta+\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\pi+\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$

$=\frac{1}{2}\pi+\frac{t}{40}+\frac{1}{2}\sin\frac{t}{20}$ ($\because\ \theta=\frac{t}{40}$)

$\therefore\ \frac{dS}{dt}=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}\cos\frac{t}{20}$

따라서 점 P의 좌표가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$일 때

$\theta=\frac{\pi}{6}=\frac{t}{40}$에서 $\frac{t}{20}=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{40}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{40}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

$\therefore\ a+b=83$

답 83

다른 풀이

$S=2\int_{-1}^{y}\sqrt{1-y^2}\,dy$이므로

$\frac{dS}{dy}=2\sqrt{1-y^2}=2x$ (단, $x>0$)

한편, 선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 $\theta=\frac{1}{40}t$라 하면

$y=\sin\theta=\sin\frac{t}{40}$이므로

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{40}\cos\frac{t}{40}$이다.

$\therefore\ \frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=2x\cdot\frac{1}{40}\cos\frac{t}{40}$

그런데, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 일 때

$\theta=\frac{t}{40}=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$\frac{dS}{dt}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{40}\cos\frac{\pi}{6}$

$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{80}$

확률과 통계

26.

두 사건 A, B가 독립이면 A, B^c도 독립이므로

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ 이고,

$P(A \cap B^c) = P(A)\ P(B^c) = P(A)(1-P(B))$

이다.

따라서

$P(A)\ P(B) = 2\ P(A)(1-P(B))$ 이어야 하므로

$P(B) = 2-2\ P(B)$ ($\because\ P(A) \neq 0$)

$$\therefore\ P(B) = \frac{2}{3}$$

또, 두 사건 A, B가 독립이면 A^c, B도 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)\,P(B) = (1-P(A))\ P(B)$$

$$= (1-P(A)) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore\ 1-P(A) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore\ P(A) = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

답 ④

27.

ㄱ. 첫 번째 히스토그램에서 10보다 크고 20보다 작은 자료의 개수는 2이고, 두 번째 히스토그램에서 15이하의 자료의 개수는 0이므로 자료의 최소값은 16이상이다.

또, 첫 번째 히스토그램에서 60이상인 자료의 개수는 0이고, 두 번째 히스토그램에서 55보다 크고 65보다 작은 자료의 개수는 1이므로 자료의 최대값은 59이하이다.

따라서 자료의 범위는 $43(=59-16)$ 이하이다. (거짓)

ㄴ. 자료의 개수는 17이므로 자료의 중앙값은 9번째로 큰 수이다.

첫 번째 히스토그램에서 9번째로 큰 자료는 30보다 크고 40보다 작고,

두 번째 히스토그램에서 9번째로 큰 자료는 25보다 크고 35보다 작다.

따라서 자료의 중앙값은 30보다 크고 35보다 작다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 55보다 크고 60보다 작은 자료의 개수는 1이다.

이 때, 첫 번째 히스토그램에서 50보다 크고 60보다 작은 자료의 개수는 2이므로 50보다 크고 55보다 작은 자료의 개수는 1이다.

이 때, 두 번째 히스토그램에서 45보다 크고 55보다 작은 자료의 개수는 1이므로 45보다 크고 50보다 작은 자료의 개수는 0이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

28.

100권의 공책 중 A회사 제품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.1)$을 따른다.

$\therefore\ E(X) = 100 \times 0.1 = 10$,

$V(X) = 100 \times 0.1 \times 0.9 = 9$

이 때, 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(10, 3^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(X \geq 13) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{13-10}{3}\right)$$

$= \mathrm{P}(Z \geqq 1) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1)$
$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

답 ③

29.

ㄱ. $V(\overline{X_A}) = \frac{4}{7}$, $V(\overline{X_B}) = \frac{4}{10}$ 이므로

$\overline{X_A}$의 분산은 $\overline{X_B}$의 분산보다 크다. (참)

ㄴ. $E(\overline{X_A}) = E(\overline{X_B}) = m$,

$\sigma(\overline{X_A}) = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\sigma(\overline{X_B}) = \frac{2}{\sqrt{10}}$ 이므로

$$P(\overline{X_A} \leq m+2) = P\left(\frac{\overline{X_A} - m}{\frac{2}{\sqrt{7}}} \leq \frac{(m+2)-m}{\frac{2}{\sqrt{7}}}\right)$$
$$= P(Z \leq \sqrt{7}),$$

$$P(\overline{X_B} \leq m+2) = P\left(\frac{\overline{X_B} - m}{\frac{2}{\sqrt{10}}} \leq \frac{(m+2)-m}{\frac{2}{\sqrt{10}}}\right)$$
$$= P(Z \leq \sqrt{10})$$

$\therefore$ $P(\overline{X_A} \leq m+2) < P(\overline{X_B} \leq m+2)$ (참)

ㄷ. $P(|Z| \leq k) = 0.95$를 만족하는 양수 k에 대하여

$$b-a = 2 \times k \times \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad d-c = 2 \times k \times \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$\therefore$ $d-c < b-a$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30.

한 상자에 들어있는 50개의 제품을 모두 검사할 때 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라 하고, 확률변수 X가 이항분포 $B(50, p)$를 따른다고 하자.

한 상자에 포함된 불량품의 개수의 평균은

$$E(X) = m = 50p$$

이고, 분산은

$$V(X) = 50p(1-p) = \frac{48}{25}$$

$$\therefore \; p(1-p) = \frac{48}{25} \cdot \frac{1}{50} = \frac{48}{50} \times \frac{2}{50}$$

$$\therefore \; p = \frac{48}{50} \text{ 또는 } p = \frac{2}{50}$$

그런데, m은 5이하의 자연수이어야 하므로 $p = \frac{2}{50}$ 이고, $m = E(X) = 50 \times \frac{2}{50} = 2$ 이다.

애프터서비스로 인해 필요한 비용의 기대값은

$$E(aX) = aE(X) = 2a$$

이므로 $2a = 60000$ 이어야 한다.

$$\therefore \; a = 30000$$

$$\therefore \; \frac{a}{1000} = 30$$

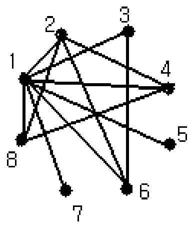
답 30

이산수학

26.
같은 종류의 9개의 사탕을 같은 종류의 5개의 봉지에 빈 봉지가 없도록 나누어 넣는 방법의 수는 9를 1이상의 5개의 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
(1,1,1,1,5), (1,1,1,2,4), (1,1,1,3,3), (1,1,2,2,3), (1,2,2,2,2)의 5이다.

답 ④

27.
약수 또는 배수 관계에 있는 서로 다른 두 꼭지점을 모두 변으로 연결한 그래프는 다음과 같다.



따라서 차수가 3인 꼭지점은 4, 6, 8의 3개다.

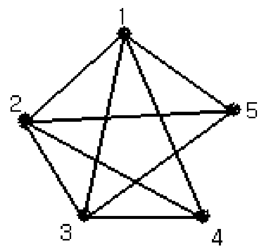
답 ③

28.
A에서 H로 가는 모든 경로와 각 경로에서 필요한 작업 일 수를 적으면 다음과 같다.
A→B→D→F→H : 22일
A→B→E→F→H : 18일
A→B→E→G→H : 19일
A→C→E→F→H : 16일
A→C→E→G→H : 17일
이 때, 구하는 최소의 작업 일 수는 각 경로에 필요한 작업 일 수의 최대값과 같으므로 22일이다.

답 ②

29.
행렬 A^2의 $(i,\ j)$성분은 그래프에서 꼭지점 i와 꼭지점 j를 잇는 2개의 변으로 이루어진 경로의 수와 같다.

그런데, $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$에서 (1,1)성분은 4이므로 2개의 변을 이용하여 1에서 1로 가는 경로의 개수는 4개이다. 따라서 꼭지점 1의 차수는 4이다.
이와 같은 방법으로 꼭지점 2, 3의 차수도 각각 4이고, 꼭지점 4, 5의 차수는 각각 3임을 알 수 있다. 따라서 그래프 G는 그림과 같다.

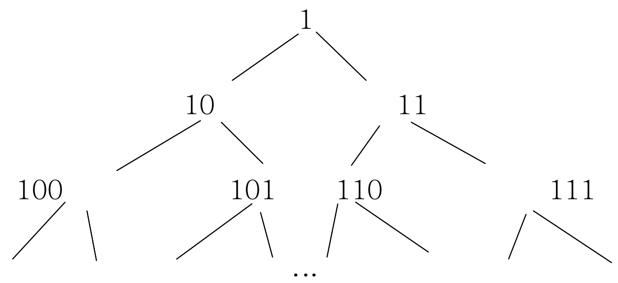


ㄱ. 차수가 3인 꼭지점은 꼭지점 4와 꼭지점 5의 2개이다. (참)
ㄴ. 경로 1-2-4-3-5-1과 같이 모든 꼭지점을 한 번씩만 지나 원래의 꼭지점으로 되돌아오는 해밀턴회로를 갖는다. (참)
ㄷ. 그래프 G에서 서로 다른 임의의 두 꼭지점을 잇는 2개의 변으로 이루어진 경로는 2개 이상임을 알 수 있다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30.

주어진 자연수를 이진법으로 나타내면 다음과 같다. (단, 이진법 기호는 생략)



위의 그림에서 어떤 수의 바로 아래 줄의 왼쪽에 연결된 두 수는 바로 위의 수의 일의 자리에 0을 붙이고, 아래 줄의 오른쪽에 연결된 수는 바로 위의 수의 일의 자리에 1을 추가한 것임을 알 수 있다.

예를 들면, 101과 연결된 바로 아래의 두 수 중 왼쪽의 수는 1010이고, 오른쪽의 수는 1011이다.

그런데, $33=100001_{(2)}$, $79=1001111_{(2)}$이므로 맨 앞부터 100까지 공통이다.

따라서 구하는 수는 $100_{(2)}=4$ 이다.

$\therefore\ k=M(33,\ 79)=4$

$\therefore\ 10k=40$

답 40