2016학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ④	02. ②	03. ③	04. ⑤	05. ①
06. ③	07. ⑤	08. ②	09. ①	10. ④
11. ②	12. ④	13. ①	14. ③	15. ①
16. ⑤	17. ⑤	18. ②	19. ④	20. ③
21. ④	22. 9	23. 11	24. 10	25. 6
26. 2	27. 68	28. 4	29. 25	30. 128

1. **출제의도** : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\6&4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 $A+2B$의 $(1,2)$ 성분은 4이다.

정답 ④

2. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2 5+\log_2\frac{4}{5}=\log_2\left(5\times\frac{4}{5}\right)$$
$$=\log_2 4$$
$$=\log_2 2^2$$
$$=2\log_2 2$$
$$=2$$

정답 ②

3. **출제의도** : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}\times\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}$$

정답 ③

4. **출제의도** : 삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta=\frac{1}{7}$ 이므로

$\sin\theta=\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos\theta=\pm\frac{7}{5\sqrt{2}}$

(단, 복부호동순)

$$\therefore\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\left(\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)\left(\pm\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{14}{50}=\frac{7}{25}$$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 e^{x+4}dx=e^4\int_0^1 e^x dx$$
$$=e^4\left[e^x\right]_0^1$$
$$=e^4(e-1)$$
$$=e^5-e^4$$

정답 ①

6. **출제의도** : 일차변환을 이용하여 점을

옮길 수 있는가?

정답풀이 :

역변환 f^{-1}에 의하여 점 $(4,1)$이 점 (a,b)로 옮겨지므로 일차변환 f에 의하여 점 (a,b)는 점 $(4,1)$로 옮겨진다.

즉,

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

에서 $2a=4$, $b=1$ 이므로

$a=2$, $b=1$

$\therefore\ a+b=3$

정답 ③

7. **출제의도** : 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = a\sin x + \sqrt{11}\cos x$

$\quad = \sqrt{a^2+11}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{a^2+11}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+11}}\right)$

에서 $-1 \le \sin(x+\alpha) \le 1$ 이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+11}$

$\sqrt{a^2+11} = 6$에서

$a^2+11=36$, $a^2=25$

$\therefore\ a=5$ $(\because\ a>0)$)

정답 ⑤

8. **출제의도** : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n = \dfrac{a_1(3^n-1)}{3-1} = \dfrac{a_1}{2}(3^n-1)$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{2}(3^n-1)}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$= \frac{a_1}{2}(1-0)$$

$$= \frac{a_1}{2}$$

따라서 $\dfrac{a_1}{2}=5$에서

$a_1 = 10$

정답 ②

9. **출제의도** : 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 A, B, C, D에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 배열하는 수와 같으므로

${}_4\Pi_5 = 4^5 = 1024$

정답 ①

10. **출제의도** : 두 직선이 서로 수직임을 이용하여 직선의 x절편을 구한 후 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y=2nx$와 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2n}$이므로 점 $P(n,2n^2)$을 지나고 기울

기가 $-\frac{1}{2n}$인 직선의 방정식은

$y-2n^2=-\frac{1}{2n}(x-n)\cdots$㉠

㉠의 x절편은

$-2n^2=-\frac{1}{2n}(x-n)$

에서 $x=4n^3+n$ 이므로

$\overline{OQ}=l_n=4n^3+n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}(4+\frac{1}{n^2})$

$=4+0=4$

정답 ④

11. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 분수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{2}{f(x)-1}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$에서

양변에 분모의 최소공배수

$\{f(x)-1\}(1-x)(1+x)$

를 곱하면

$2(1-x^2)=\{f(x)-1\}(1+x)+\{f(x)-1\}(1-x)$

$2(1-x^2)=2\{f(x)-1\}$

$\therefore f(x)=2-x^2$ (단, $f(x)\neq1$, $x\neq\pm1$)

따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=2-x^2$의 그래프의 교점에서 $f(x)=1$ 이거나 $x=\pm1$인 점을 제외하면 되므로 구하는 실근의 개수는 2이다.

정답 ②

12. **출제의도** : 타원의 정의를 이용하여 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{FF'}=2c$, $\overline{PF}=c$ 이고 $\angle FPF'=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{PF'}=\sqrt{3}c$

따라서, 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=\sqrt{3}c+c$

$=(\sqrt{3}+1)c=4$

$\therefore c=\frac{4}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2\sqrt{3}-2$

정답 ④

13. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y=2$와 곡선 $y=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$의 교점의 x좌표는

$2=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$

$\sin\frac{\pi}{4}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_1^3\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x-2\right)dx$

$=\left[-2\sqrt{2}\times\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x-2x\right]_1^3$

$=-2\sqrt{2}\times\frac{4}{\pi}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-6$

$-\left\{(-2\sqrt{2})\times\frac{4}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right\}$

$$=\frac{8}{\pi}-6+\frac{8}{\pi}+2$$

$$=\frac{16}{\pi}-4$$

정답 ①

14. 출제의도 : 접선을 이용하여 부등식을 만족시키는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

닫힌 구간 $[0,4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시키기 위해서는 일차함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(1,2)$에서 함수

$$f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$$

의 그래프와 접해야 한다.

따라서,

$$f'(x)=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x\times\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}x$$

이고

$$f'(1)=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2}$$

이므로

$$g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2$$

$$=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+2$$

$\therefore\ g(3)=\pi+2$

정답 ③

15. 출제의도 : 무한히 반복되는 닮은꼴의 도형들에서 넓이의 합을 구할 수 있는가?

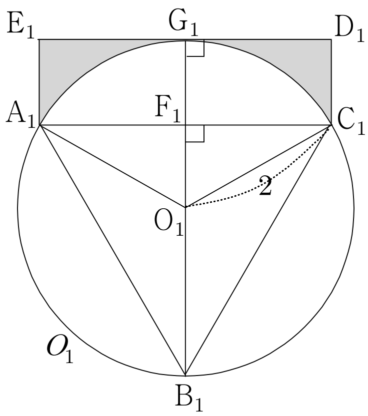
정답풀이 :

원 O_1의 중심을 O_1, 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 한 변의 길이를 a라 하자.

점 O_1은 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{O_1B_1}}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=2$$

$\therefore\ a=2\sqrt{3}$



직선 $\mathrm{B_1O_1}$이 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{D_1E_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하면

$$\overline{\mathrm{O_1F_1}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$$

$$\overline{\mathrm{F_1G_1}}=\overline{\mathrm{O_1G_1}}-\overline{\mathrm{O_1F_1}}=2-1=1$$

$$\therefore\ S_1=2\sqrt{3}\times1-\left(\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1\right)$$

$$=2\sqrt{3}-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$에 내접하는 원 O_2의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 r라 하면 두 점 O_1, O_2가 일치하므로

$$r=\overline{\mathrm{O_1F_1}}=1$$

따라서 두 원 O_1, O_2의 닮음비가 2 : 1

이다.

그림 R_n에서 처음으로 색칠된 도형을 T_n이라 하면 두 도형 T_1, T_2의 넓이의 비는 $4:1$이고, 같은 방법으로 두 도형 T_n, $T_{n+1}(n \geq 1)$의 넓이의 비도 $4:1$이므로

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{4}S_1$$

$$S_3 = S_1 + \frac{1}{4}S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1$$

……

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n$

$$= S_1 + \frac{1}{4}S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 S_1 + \cdots$$

$$= \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}S_1$$

$$= \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$$

정답 ①

16. 출제의도 : 합성함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x \neq 1$일 때 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$에서 연속이면 된다.

$$\lim_{x\to 1+0} (g \circ f)(x) = \lim_{t\to 1-0} g(t)$$

$$= 2 + 2^{-1} = \frac{5}{2} \cdots ㉠$$

$a \geq 0$일 때,

$$\lim_{x\to 1-0} (g \circ f)(x) = \lim_{t\to a-0} g(t)$$

$$= 2^a + 2^{-a}$$

$a < 0$일 때,

$$\lim_{x\to 1-0} (g \circ f)(x) = \lim_{t\to a+0} g(t)$$

$= 2^a + 2^{-a}$이므로

$\lim_{x\to 1-0} (g \circ f)(x) = 2^a + 2^{-a} \cdots ㉡$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1)$

$$= 2 + 2^{-1} = \frac{5}{2} \cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢이 일치해야 하므로

$$2^a + 2^{-a} = \frac{5}{2}$$

이때, $2^a = s(s>0)$라 하면

$s + \frac{1}{s} = \frac{5}{2}$, $2s^2 - 5s + 2 = 0$

$(2s-1)(s-2) = 0$

$\therefore\ s = \frac{1}{2}$ 또는 $s = 2$

즉, $2^a = \frac{1}{2}$ 에서 $a=-1$, $2^a = 2$ 에서 $a=1$이므로 모든 실수 a의 값의 곱은 $-1 \times 1 = -1$

정답 ⑤

17. 출제의도 : 수열에 관련된 풀이과정을 이해하여 알맞은 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$$S_{n+1} + 1 = 2^n(S_n + 1)$$

이다. $b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면

$b_1=1$이고

$\log_2(S_{n+1}+1)=\log_2\{2^n(S_n+1)\}$

$\log_2(S_{n+1}+1)=n+\log_2(S_n+1)$

$b_{n+1}=\boxed{n}+b_n$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=1+\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=\frac{n^2-n+2}{2}\ (n\geq 2)$$

$b_1=1$에서

$$b_n=\frac{n^2-n+2}{2}\ (n\geq 1)$$

이므로

$$S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1$$

이다. 그러므로 $a_1=1$이고, $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\left(2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\right)-\left(2^{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}}-1\right)$$
$$=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}$$
$$=2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}\times(2^{n-1}-1)$$

이다.

따라서, $f(n)=n$, $g(n)=\frac{n^2-3n+4}{2}$

이므로

$$f(12)-g(5)=12-\frac{5^2-15+4}{2}$$
$$=12-7=5$$

정답 ⑤

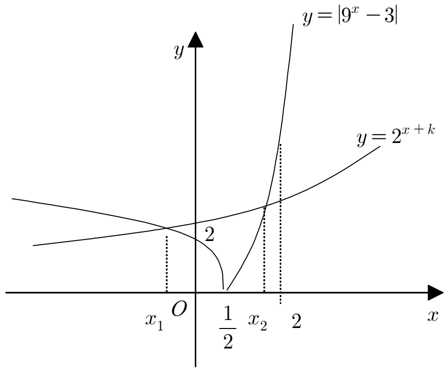
18. **출제의도** : 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|9^x-3|=0$ 에서 $9^x=3^{2x}=3$ 이므로

$x=\frac{1}{2}$

따라서, 두 곡선 $y=|9^x-3|$, $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2가 $x_1<0$, $0<x_2<2$ 를 만족시키는 경우는 그림과 같다.



즉, $x=0$일 때,

$2^{0+k}=2^k>2\cdots$㉠

$x=2$ 일 때,

$2^{2+k}=4\times 2^k<|9^2-3|=78$

$2^k<19.5\ \cdots$㉡

㉠,㉡을 만족시키는 자연수 k는

2, 3, 4

이므로 그 합은

$2+3+4=9$

정답 ②

19. **출제의도** : 쌍곡선의 정의를 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선은 원점에 대하여 대칭이므로
$\overline{PG}=\overline{QG'}$, $\overline{PF}=\overline{QF'}$
주어진 쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로
(i) $\overline{PG}=k$라 하면 쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{PG}\times\overline{QG}=\overline{QG'}\times\overline{QG}$
$=k(k+2)=8$
$k^2+2k-8=0$
$(k+4)(k-2)=0$
$\therefore\ k=2\ (\because k>0)$
(ii) $\overline{PF}=l$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{PF}\times\overline{QF}=\overline{QF'}\times\overline{QF}$
$=l(l+2)=4$
$l^2+2l-4=0$
$\therefore\ l=-1+\sqrt{5}\ (\because l>0)$
(i), (ii)에 의해 사각형 PGQF의 둘레의 길이는
$k+(k+2)+l+(l+2)$
$=2k+2l+4$
$=2\times2+2(-1+\sqrt{5})+4$
$=6+2\sqrt{5}$

정답 ④

20. **출제의도** : 지표와 가수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
(1) $n=4$이면
(i) $1\le t<10$일 때 $0\le \log t<1$이므로
$0\le 4\log t<4$
따라서, $m=1,2,3,4$에 대하여
$f(t^4)=4\log t-(m-1)$
(단, $m-1\le 4\log t<m$)
$f(t^4)+2f(t)$
$=4\log t-(m-1)+2\log t$
$=6\log t-m+1=1$
$\therefore\ \log t=\dfrac{m}{6}$
그런데, $m=4$일 때 즉 $\log t=\dfrac{2}{3}$인 경우 $3\le 4\log t<4$ 를 만족시키지 못한다.
(ii) $10\le t<100$일 때 $1\le \log t<2$이므로
$4\le \log t<8$
따라서, $m=1,2,3,4$에 대하여
$f(t^4)=4\log t-(m+3)$
(단, $m+3\le 4\log t<m+4$)
$f(t^4)+2f(t)$
$=4\log t-(m+3)+2(\log t-1)$
$=6\log t-m-5=1$
$\therefore\ \log t=\dfrac{m+6}{6}$
그런데, $m=4$일 때 즉 $\log t=\dfrac{5}{3}$인 경우 $7\le 4\log t<8$을 만족시키지 못한다.
(i), (ii)에 의하여 $a_4=6$
(2) $n=5$일 때
(i) $1\le t<10$일 때 $0\le \log t<1$이므로
$0\le 5\log t<5$
따라서, $m=1,2,3,4,5$에 대하여
$f(t^5)=5\log t-(m-1)$
(단, $m-1\le 5\log t<m$)
$f(t^5)+2f(t)$
$=5\log t-(m-1)+2\log t$
$=7\log t-m+1=1$
$\therefore\ \log t=\dfrac{m}{7}$
그런데, $m=4$일 때 즉, $\log t=\dfrac{4}{7}$, $m=5$ 일 때 즉, $\log t=\dfrac{5}{7}$인 경우는 각각

$3 \le 5\log t < 4$, $4 \le 5\log t < 5$를 만족시키지 못한다.

(ii) $10 \le t < 100$일 때 $1 \le \log t < 2$이므로

$5 \le 5\log t < 10$

따라서, $m = 1,2,3,4,5$에 대하여

$f(t^5) = 5\log t - (m+4)$

(단, $m+4 \le 5\log t < m+5$)

$f(t^5) + 2f(t)$

$= 5\log t - (m+4) + 2(\log t - 1)$

$= 7\log t - m - 6 = 1$

$\therefore \log t = \dfrac{m+7}{7}$

그런데, $m=4$일 때 즉, $\log t = \dfrac{11}{7}$, $m=5$일 때 즉, $\log t = \dfrac{12}{7}$인 경우는 각각

$8 \le 5\log t < 9$, $9 \le 5\log t < 10$

을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $a_5 = 6$

$\therefore a_4 + a_5 = 12$

정답 ③

21. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 역함수를 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$에서

$$f'(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + e^{x+1}(2x + n - 2) + a$$
$$= e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a$$

$f(x)$가 역함수를 가지려면

$f'(x) \ge 0 \quad \cdots ㉠$

이어야 한다.

$h(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1)$이라 하면

$$h'(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + e^{x+1}(2x + n)$$
$$= e^{x+1}\{x^2 + (n+2)x + n + 1\}$$
$$= e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$$

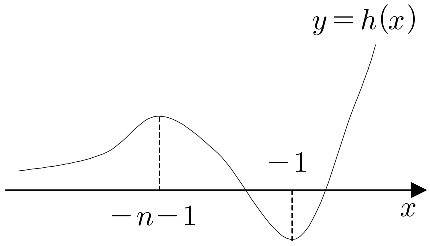
$h'(x) = 0$에서

$x = -n-1$ 또는 $x = -1$

함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		극대		극소	

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 n이 2이상이 자연수이므로 함수 $h(x)$는 $x = -1$에서 최솟값

$h(-1) = 2 - n$

을 갖는다.

즉, ㉠에서

$2 - n + a \ge 0$

$a \ge n - 2$

따라서 실수 a의 최솟값 $g(n)$은

$g(n) = n - 2$

$1 \le g(n) \le 8$에서

$1 \le n - 2 \le 8$

$\therefore 3 \le n \le 10$

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$$3 + 4 + 5 + \cdots + 10 = \frac{8(3+10)}{2} = 52$$

정답 ④

22. **출제의도** : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{7x+1}=x-1$의 양변을 제곱하면

$7x+1=x^2-2x+1$

$x^2-9x=0$, $x(x-9)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=9$

그런데, $x=0$은 무연근이므로

$x=9$

정답 9

23. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_7+a_{11}=2+6d+2+10d$

$=4+16d=20$

$\therefore d=1$

$\therefore$ $a_{10}=a_1+9d$

$=2+9\times1=11$

정답 11

24. **출제의도** : 포물선에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y^2=20x=4\times5x$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x+10$

따라서 y절편은 $x=0$일 때 10이다.

정답 10

25. **출제의도** : 매개변수의 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2t^2+10$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t^2+10}{2t}$$

$$=\frac{t^2+5}{t}$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1+5}{1}=6$

정답 6

26. **출제의도** : 연립일차방정식의 해가 무수히 많을 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ay\\2x-y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&a\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&a\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1-a\\-3&4a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdots㉠$$

따라서, 행렬 $\begin{pmatrix}1&-1-a\\-3&4a+1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 ㉠은 $x=0$, $y=0$이외의 해를 가지므로

$1\times(4a+1)-(-1-a)(-3)=0$

$a-2=0$

$\therefore$ $a=2$

정답 2

27. 출제의도 : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $x+y+z+u=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 (x, y, z, u)의 개수는

$$
\begin{aligned}
{}_4H_6 &= {}_9C_6 \\
&= {}_9C_3 \\
&= \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84
\end{aligned}
$$

(ii) $x=u$일 때, $x+y+z+u=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 (x, y, z, u)의 개수는

$2x+y+z=6$ …㉠

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로 ㉠에서

$x=0$일 때, ${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

$x=1$일 때, ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

$x=2$일 때, ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

$x=3$일 때, ${}_2H_0={}_1C_0=1$

따라서 구하는 개수는

$7+5+3+1=16$

(i), (ii)에 의해 구하는 개수는

$84-16=68$

정답 68

28. 출제의도 : 합성변환과 역변환을 이해하고 점을 이동시킬 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

또한, 일차변환 f^{-1}을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

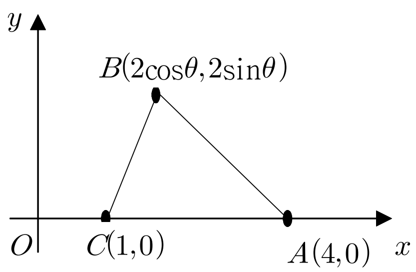
$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $C(1,0)$

따라서, 삼각형 ABC는 그림과 같고 넓이는 1이므로



$$\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times(4-1)=3\sin\theta=1$$

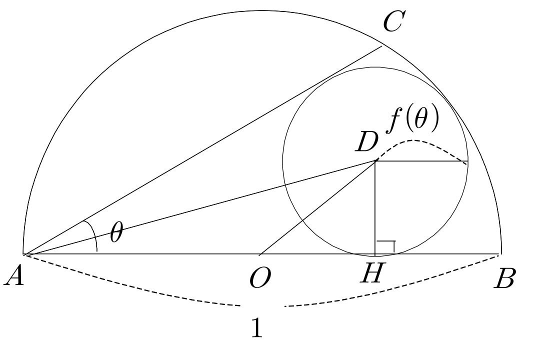
$\therefore$ $\sin\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $p+q=4$

정답 4

29. 출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 중심을 D, 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 AB 의 중점을 O라 하자.

$\angle BAC=\theta$ 이므로 $\angle HAD=\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$

한편, 직각삼각형 DOH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}$

이므로

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{1}{4}-f(\theta)+\{f(\theta)\}^2-\{f(\theta)\}^2$$
$$=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}+\frac{1}{4}$$

$$-f(\theta)=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}$$

의 양변에 $\tan^2\frac{\theta}{2}$ 을 곱하여 정리하면

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $f(\theta)>0$이므로

$$-\tan^2\frac{\theta}{2}=f(\theta)-\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta^2}{4}}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 100\alpha=25$

정답 25

30. 출제의도 : 정적분의 값이 최대가 될 조건을 구하고 그 때의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0\le k\le 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$f(k+t)=f(k)\ (0<t\le 1)$

을 만족시키는 함수

$y=f(x)\ (k<x\le k+1)$

의 그래프는 x축과 평행하다.

또한, $0\le k\le 7$인 각각의 정수 k를 m이라 하면

$f(m+t)=2^t\times f(m)\ (0<t\le 1)$

이므로

$$f(m+1+t)=2^t\times f(m+1)$$
$$=2^t\times 2\times f(m)$$
$$=2^{t+1}\times f(m)$$

따라서, $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$f(k+t)=2^t \times f(k)\ (0<t \le 1)$

을 만족시키는 함수 $y=f(x)$ $(k<x \le k+1)$의 그래프는 지수의 밑이 2인 지수함수의 그래프이다.

그리고, $f(8) \le 100$ 이므로

$2^6=64,\ 2^7=128$

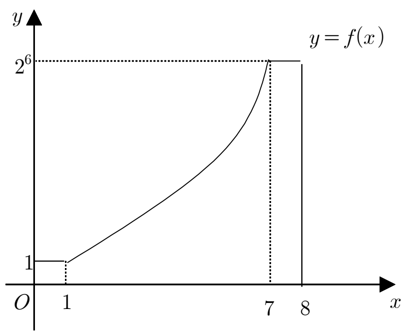
에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 64이어야 한다.

따라서, 연속함수 $f(x)$에 대하여

$\int_0^8 f(x)dx$가 최댓값을 가지면서 열린 구간 $(0,8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2가 되어야 하므로

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 2^{x-1} & (1 \le x \le 7) \\ 64 & (7 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서, $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은

$1 \times 1+\int_1^7 2^{x-1}dx+1 \times 2^6$

$=65+\frac{1}{2}\int_1^7 2^x dx$

$=65+\frac{1}{2}[\frac{2^x}{\ln 2}]_1^7$

$=65+\frac{1}{2}(\frac{2^7}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2})$

$=65+\frac{63}{\ln 2}$

따라서, $p=65$, $q=63$이므로

$p+q=128$

정답 128