

2006학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	4	2	1	3	4	4	1	5	2
6	2	7	3	8	5	9	3	10	2
11	4	12	2	13	4	14	1	15	3
16	3	17	1	18	90	19	380	20	13
21	22	22	16	23	10	24	241	25	84
26	1	27	5	28	5	29	5	30	10

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{8} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$$

2. [출제의도] 조건부확률을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$P(A|B) - P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= P(A \cap B) \left(\frac{1}{P(B)} - \frac{1}{P(A)} \right) = \frac{3}{20} \times \left(-\frac{2}{5} \right) = -\frac{3}{50}$$

3. [출제의도] 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a + \frac{1}{3} + a + \frac{1}{6} = 1 \text{ 에서 } a = \frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

4. [출제의도] 행렬의 연산과 곱셈공식을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ 에서 } x+y=6, xy=7$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \times 7 = 22$$

5. [출제의도] 로그함수에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\overline{AH} = a-1, \overline{PH} = \log_2 a \text{ 이고, } \overline{AH} = \overline{PH} \text{ 이므로}$$

$$a-1 = \log_2 a \quad \therefore a - \log_2 a = 1$$

따라서 점 P에서 직선 $y=x$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - \log_2 a|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2 \text{ 에서}$$

$$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore 2a_1 = 3d$$

$$\therefore a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$$

7. [출제의도] 행렬의 정의를 이해하고 행렬의 거듭제곱을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f(1) = 2, f(2) = 1 \text{ 이므로 } a_{12} = a_{21} = 1, a_{11} = a_{22} = 0$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$$\therefore A^{2006} = (A^2)^{1003} = E^{1003} = E$$

8. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

서로 악수를 나누지 않은 사람들끼리 모으면 대표 2명, 부대표 3명, 나머지 4명의 세 그룹으로 나누어진다. 따라서 구하는 확률은 이 세 그룹에서 한 명씩 택할

확률과 같다. $\therefore \frac{2 \times 3 \times 4}{9 \cdot C_3} = \frac{2}{7}$

9. [출제의도] 로그의 대소관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\therefore 1 < a < b$ 에서 $0 < \log a < \log b$ 이다.

$$\log_a a = \frac{\log a}{\log b} < \frac{\log b}{\log a} = \log_a b \text{ (참)}$$

\therefore (반례) $a=10, b=100$ 일 때

$$10 < 100 \text{이지만 } \frac{1}{10} \log 10 > \frac{1}{100} \log 100 \text{ (거짓)}$$

\therefore

$$2 \log(a+b) < \log 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow \log(a+b)^2 < \log 2(a^2 + b^2)$$

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 > 0 (\because a < b)$$

$$(a+b)^2 < 2(a^2 + b^2)$$

$$\therefore 2 \log(a+b) < \log 2(a^2 + b^2) \text{ (참)}$$

10. [출제의도] 행렬을 추론하여 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}, \dots, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

이므로 $a_n = 2^n, b_n = 3^n$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 2b_n}{2a_n + 3b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n}{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = -\frac{2}{3}$$

11. [출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

\therefore (반례) $A=3E, B=O$ 일 때,

$$A+B=3E, AB=3B \text{이지만 } A \neq 4E \text{ (거짓)}$$

$\therefore A+B=3E$ 이고 $AB=4B$ 이므로

$$(A+B)B=3EB, AB+B^2=3B, AB+B^2=3B$$

$$\therefore B^2+B=O \text{ (참)}$$

$\therefore A+B=3E$ 에서 $B=3E-A$

$$AB=A(3E-A)=3A-A^2=(3E-A)A=BA$$

$$\therefore A^2-B^2=(A+B)(A-B)=3E(A-B)=3(A-B) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 \therefore, C 이다.

12. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[가] : (좌변) $H_{2^k} = H_1 = 1$

[나] : $H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right)$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^k+2^k} \right)$$

$$= H_{2^k} + \sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+l}$$

[다] : $\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^k+l}$ 에서 항수는 2^k 개 이고,

각 항은 $\frac{1}{2^k+1}$ 보다 크거나 같으므로

$$\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^k+l} \geq 2^k \cdot \frac{1}{2^k+1}$$

13. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선택한 두 집합 X, Y 가 $X \subset Y$ 인 경우의 수는

i) $n(Y)=4$ 일 때, ${}_4C_1 \cdot (2^4-1) = 15$

ii) $n(Y)=3$ 일 때, ${}_3C_2 \cdot (2^3-1) = 28$

iii) $n(Y)=2$ 일 때, ${}_2C_2 \cdot (2^2-1) = 18$

iv) $n(Y)=1$ 일 때, ${}_1C_1 \cdot (2^1-1) = 4$

와 같이 $15+28+18+4=65$ 이고, A 의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

$${}_{16}C_2 = 120 \text{이다. 따라서 구하는 확률은 } \frac{65}{120} = \frac{13}{24}$$

14. [출제의도] 등차증항을 이용하여 직선의 기울기를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 A의 좌표를 $(-1, 0)$ 이라 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다. 직선 AB의 기울기를 m 이라 하면, 점 B의 좌표는 $(0, m)$, 점 C의 좌표는 $(m^2, 0)$, 점 D의 좌표는 $(0, -m^3)$, 점 E의 좌표는 $(-m^4, 0)$ 이다.

그런데 $\overline{AO}, \overline{OC}, \overline{EA}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\overline{OC} = \overline{AO} + \overline{EA}$ 즉, $2m^2 = 1 + (m^4 - 1)$ 따라서 $m^4 = 2m^2$ 에서 $m > 0$ 이므로 $m = \sqrt{2}$

15. [출제의도] 주어진 규칙을 이해하여 극한값을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$S_1 = 20\pi, S_n = \frac{1}{4} S_{n-1} + 12\pi \text{ (} n \geq 2 \text{)}$$

$$S_n - 16\pi = \frac{1}{4} (S_{n-1} - 16\pi) \text{ 이므로}$$

$$S_n - 16\pi = (20\pi - 16\pi) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \pi$$

$$S_n = 16\pi + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \pi \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 16\pi$$

16. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

2006년도의 인구수를 P 라 하면

$$P = 5 \cdot 2^{\frac{2006-2001}{15}} = 5 \cdot 2^{\frac{5}{15}} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \text{ 이므로}$$

$$2P = 5 \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 5 \cdot 2^{\frac{t-2001}{15}} \text{ 에서 } \frac{4}{3} = \frac{t-2001}{15}$$

$$\therefore t = 2021$$

17. [출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

자동차의 속력을 확률변수 X 라고 하면, X 는 정규분포 $N(104, 8^2)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120-104}{8}\right) = P(Z > 2)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.48$$

$$= 0.02 = \frac{1}{50}$$

따라서 자동차 A, B가 모두 과속으로 단속될 확률은 $\frac{1}{50} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{2500}$

18. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_7 2} = \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 6$$

$$= \log_2 (3 \cdot 5 \cdot 6)$$

$$= \log_2 90 = \frac{1}{\log_{90} 2}$$

$$\therefore k = 90$$

19. [출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

7의 개수에 따라 나누어 생각하면

(i) 7이 두 개인 경우 : $\vee \square \vee \square \vee \square \vee$ 의 꼴에서 \square 의 자리에 1, 2, 3, 5, 9 중 세 개를 넣고, 나머지 \vee 의 자리에 2개의 7을 배열하는 방법과 같으므로 ${}_3P_3 \times {}_4C_2 = 60 \times 6 = 360$ (개)

(ii) 7이 세 개인 경우 : $7 \square 7 \square 7$ 의 꼴에서 \square 의 자리에 1, 2, 3, 5, 9 중에서 두 개의 수를 배열하는 방법과 같으므로 ${}_2P_2 = 20$ (개)이다. 따라서 구하는 다섯 자리 자연수의 개수는 $20 + 360 = 380$ (개)

20. [출제의도] 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

네 팀이 짝지어서 경기를 치르게 되는 경우는

(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)의 6(가지)

(i) 전승팀이 존재할 확률 :

A가 전승됨이 될 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{8} \text{ 이고, 네뎀이므로 전승됨이 존재할 확률은 } \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$$

(ii) 전패됨이 존재할 확률 : $\frac{1}{2}$

(iii) (전승,전패)가 동시에 존재할 확률 :

(A,B)가 (전승,전패)일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{32} \text{ 이므로 (전승,전패)가 동시에 존재할 확률은 } \frac{1}{32} \times 4 \times 2 = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$\therefore m+n=8+5=13$

21. [출제의도] 이차방정식과 역행렬의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이차방정식 $x^2-6x+2=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면, $\alpha+\beta=6, \alpha\beta=2$

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ 의 역행렬은

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta-1} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta-1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

이므로

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} \beta-1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta-1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2+1 & -\beta-\alpha \\ -\beta-\alpha & \alpha^2+1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A^2)^{-1}$ 의 모든 성분의 합은

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) + 2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 2 = 6^2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 2 = 22$$

22. [출제의도] 수열의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_{25} + 1 = (a_{13} + 1) + 1 = a_{13} + 2 = (a_7 + 1) + 2 \\ &= a_7 + 3 = (a_4 + 1) + 3 = a_4 + 4 = (a_2 + 1) + 4 \\ &= a_2 + 5 = (a_1 + 1) + 5 = 16 \end{aligned}$$

[참고] $a_1 = 10, a_2 = 11, a_{2n-1} = a_{2n} = a_n + 1 (n \geq 2)$

23. [출제의도] 로그방정식에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ 라 하면

$$(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = 2\log_3 x + 2\log_3 y = \log_3 x^2 + \log_3 y^2 \text{ 는}$$

$$X^2 + Y^2 = X + Y, \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\log_3 xy = \log_3 x + \log_3 y = X + Y \text{ 에서 직선}$$

$$X + Y - \log_3 xy = 0 \text{ 과 } \textcircled{1} \text{이 만나야 하므로}$$

$$\left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \log_3 xy}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, |1 - \log_3 xy| \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq \log_3 xy \leq 2$$

$$\therefore 1 \leq xy \leq 9 \quad \therefore M+m=9+1=10$$

24. [출제의도] 수열의 규칙을 찾아 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 제 n 행에 있는 항의 수는 n 개이고

$$1+2+3+\dots+10+11=66 \text{ 이므로 제 66 항은 제 11 행의 끝항이다. 각 행에 있는 첫째항은 } 1, 3, 9, 19, 33, \dots$$

이므로 제 n 행의 첫째항은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-2) = 1 + \frac{4n(n-1)}{2} - 2(n-1)$$

$$= 2n^2 - 4n + 3$$

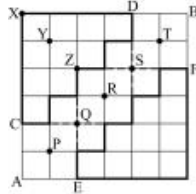
따라서 제 11행의 첫째항은 $2 \times 11^2 - 4 \times 11 + 3 = 201$ 이고

각 행은 공차가 4인 등차수열이므로 제 66항은

$$201 + 10 \times 4 = 241$$

25. [출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

다음 그림에서 C에서 D까지 최단거리의 경로의 수는



i) $A \rightarrow C \rightarrow X \rightarrow D \rightarrow B : 1$

ii) $A \rightarrow C \rightarrow Y \rightarrow D \rightarrow B : 1 \times \frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} \times 1 = 16$

iii) $A \rightarrow C \rightarrow Z \rightarrow D \rightarrow B : 1 \times \left(\frac{4!}{2!2!} - 1\right) \left(\frac{4!}{2!2!} - 1\right) \times 1 = 25$

이므로 $1+16+25=42$ (가지)

마찬가지로 E에서 F까지 최단거리의 경로의 수도 42(가지)이다.

따라서 구하는 최단거리의 경로의 수는 $42+42=84$ (가지)

26. [출제의도] 로그가 정의되는 조건을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. 밑의 조건: $a^2 - a + 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$

진수의 조건: $a^2 + 1 \geq 1$

따라서 항상 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. (반례) $a=0$ 일 때 밑은 $2|a|+1=1$ 이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. (반례) $a=1$ 일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$ 이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

27. [출제의도] 지수방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^x = t (t > 0), g(t) = t^2 - 2at + a^2 - a - 6$ 이라 하자. 방정식 $4^x - a \cdot 2^{x+1} + a^2 - a - 6 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지면, 방정식 $g(t) = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

방정식 $g(t) = 0$ 의 서로 다른 두 양의 실근을 α, β 라 하면, $\alpha > 0, \beta > 0$ 이므로

$$D/4 = a^2 - (a^2 - a - 6) = a + 6 > 0 \text{ 에서 } a > -6 \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta = 2a > 0 \text{ 에서 } a > 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta = a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) > 0 \text{ 에서}$$

$$a > 3, a < -2 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 구하는 범위는 $a > 3$

28. [출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꺼낸 세 개의 전구 중에서 두 개가 노란 전구일 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

이 때, A에서 꺼낸 전구가 노란 전구일 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

29. [출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\overline{OA}_n = a_n \text{ 이라 하면 } a_n = \pi \cdot \frac{a_{n+1}}{2} \text{ 에서}$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{\pi} a_n \text{ 이므로}$$

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} = (6\pi - 12) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \overline{OA}_n = \pi \cdot \frac{a_n}{2} = \frac{\pi}{2} (6\pi - 12) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

따라서 구하는 값은 첫째항이 $\frac{\pi}{2} (6\pi - 12)$, 공비가 $\frac{2}{\pi}$ 인 무한등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{OA}_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6\pi - 12}{1 - \frac{2}{\pi}} = 3\pi^2$$

30. [출제의도] 확률변수의 표준편차를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$c \sum_{k=1}^n k = 1 \text{ 에서 } c = \frac{2}{n(n+1)}$$

X의 표준편차가 $\sqrt{6}$ 이므로 X의 분산 $V(X)$ 는

$$V(X) = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot (ck) - \left(\sum_{k=1}^n k \cdot ck\right)^2 = 6 \text{ 에서}$$

$$c \sum_{k=1}^n k^2 - \left(\sum_{k=1}^n ck^2\right)^2 = 6$$

위 식에 $c = \frac{2}{n(n+1)}$ 를 대입하여 정리하면

$$\frac{2}{n(n+1)} \times \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}^2 = 6$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = 6, n^2 + n - 110 = 0$$

$$(n+11)(n-10) = 0 \quad \therefore n = 10$$

수리'나'형 정답

1	④	2	⑤	3	④	4	①	5	④
6	②	7	③	8	⑤	9	①	10	②
11	④	12	②	13	③	14	①	15	③
16	③	17	⑤	18	90	19	102	20	20
21	22	22	16	23	100	24	241	25	375
26	①	27	⑤	28	②	29	⑤	30	150

해설

1. '가'형과 동일

2. [출제의도] 합의 기호를 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} (k+2) + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{(k+1)^2 - 2(k+2) + 3\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \end{aligned}$$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n+4) - n^2}{(n+1)(n+2) - n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 7n + 12) - n^2}{(n^2 + 3n + 2) - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 12}{3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{12}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

4. '가'형과 동일

5. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 적용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}} = (2^{-8})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{8}{n}} \text{ 에서 } 2^{-\frac{8}{n}} \text{이 자연수이려면}$$

$n = -1, -2, -4, -8$ 이어야 하고, 이 때 $2^{-\frac{8}{n}}$ 의 값은 각각 256, 16, 4, 2이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 4이다.

6 ~ 7. '가'형과 동일

8. [출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A^4 = O$ 의 양변에 $-E$ 를 더하면 $A^4 - E = -E$ 이므로
 $E - A^4 = E$
 $E - A^4 = (E - A)(E + A)(E + A^2) = E$ 이므로
 $(E - A)^{-1} = (E + A)(E + A^2)$,
 $(E + A)^{-1} = (E - A)(E + A^2)$,
 $(E + A^2)^{-1} = (E - A)(E + A) = E - A^2$
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 역행렬이 존재한다.

9. [출제의도] 논리적 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

네 사람은 수리영역 문항을 각각 1문항씩 풀어야 하며, C가 언어영역을 풀었다고 할 때, 네 사람이 푼 문항을 표로 나타내면 다음과 같다.

	언어	수리	외국어	사탐	계
A	○	○	☆		3
B		○	○		3
C	○	○		○	3
D		○	○		3
계	3	4	3	2	12

B와 D는 언어영역 문항을 풀 수도 있고 사회탐구 영역 문항을 풀 수도 있다.
따라서 'A는 외국어영역 문항을 풀었다.'가 참이다.

10 ~ 12. '가'형과 동일

13. [출제의도] 로그와 행렬에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}BA = B$ 에서 $A(A^{-1}BA) = AB$ 이므로
 $BA = AB$
 $BA = \begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \log x + \log y \log x + z \log y & \\ \log x & y \log z + z \log z \end{pmatrix}$
 $AB = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \log x & x \log y + y \log z \\ \log x & \log y + z \log z \end{pmatrix}$
 $BA = AB$ 에서 $\log y = 0, \log x = \log z$
 $\therefore y = 1, x = z$

한편, A^{-1} 가 존재하므로 $x \neq 1$
따라서 조건을 만족하는 행렬 A는
 $\begin{pmatrix} 21 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 41 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \end{pmatrix}$ 의 4개이다.

14 ~ 16. '가'형과 동일

17. [출제의도] 행렬을 이용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

<표1>을 행렬로 나타내면
 $A = \begin{pmatrix} 30000 & 10000 \\ 20000 & 20000 \end{pmatrix} = 10000 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
이고, <표2>를 행렬로 나타내면 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 이다.
그러므로 곱과 음이 P약국과 Q약국에서 1개월간 구입한 약값은 $AB = 10000 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 10000 \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ 이다.
따라서 $10000 \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600000 \\ 640000 \end{pmatrix}$ 에서
 $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$
 $\therefore a = 10, b = 4$
 $\therefore a + b = 10 + 4 = 14$

18. '가'형과 동일

19. [출제의도] 넓이에 관한 수학적 기초 지식을 묻는 문제이다.

다음 그림과 같이 직사각형에서 가로, 세로의 길이를 l, m, n, x, y 라 하면, lx = 8, nx = 9, my = 6

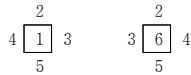
	l	m	n
x	8	a	9
y	b	6	c

$\therefore a(b+c) = mx(l y + n y) = (lx)(my) + (nx)(my)$
 $= 8 \cdot 6 + 9 \cdot 6 = 102$

20. [출제의도] 주사위의 눈에 관한 수학적 기초 지식을 묻는 문제이다.

윗 면의 눈의 수가 1, 6 일 때, 옆 면의 눈의 수는

각각 다음과 같다.



따라서 이웃한 주사위와 접한 네 개의 면에 있는 수의 합은 $5 + 4 + 5 + 6 = 20$

21 ~ 22. '가'형과 동일

23. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x = f(x) + g(x)$ 이므로
 $\log a = f(a) + g(a) \dots \textcircled{1}, \log b = f(b) + g(b) \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서
 $\log a - \log b = f(a) - f(b) + g(a) - g(b) = 2 - \log 3$
이므로 $\log \frac{a}{b} = \log \frac{100}{3}, \frac{a}{b} = \frac{100}{3}$
 $\therefore 3a = 100b$
산술평균과 기하평균의 관계에 의해
 $3a + \frac{25}{b} = 100b + \frac{25}{b} \geq 2\sqrt{100b \times \frac{25}{b}} = 100$ 이고, 등호는 $a = \frac{50}{3}, b = \frac{1}{2}$ 일 때 성립한다.
따라서 구하는 최소값은 100

24. '가'형과 동일

25. [출제의도] 등차수열을 이용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선미가 매일 푸는 문제수는 공차가 d인 등차수열이므로
 $x = 15 + (15+d) + (15+2d) + \dots + (15+8d) + 24$
 $= 30 + (30+d) + (30+2d) + \dots + (30+6d) + 39$
즉, $\frac{9(15+15+8d)}{2} + 24 = \frac{7(30+30+6d)}{2} + 39$
 $9(15+4d) + 24 = 7(30+3d) + 39$ 에서
 $15d = 90 \therefore d = 6$
따라서 수학 책의 문제수는
 $x = 9(15+4d) + 24 = 9(15+4 \cdot 6) + 24 = 375$

26. '가'형과 동일

27. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

공비를 r 라 하면 $a + b + c = a + ar + ar^2 = \frac{7}{2}$ 에서
 $a(1+r+r^2) = \frac{7}{2} \dots \textcircled{1}$
또, $abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = 1$ 에서 $a^3 r^3 = (ar)^3 = 1$ 이고
a, r 는 실수이므로 $ar = 1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $\frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2} \cdot 2r^2 + 2r + 2 = 7r, 2r^2 - 5r + 2 = 0$
 $(r-2)(2r-1) = 0 \therefore r = 2$ 또는 $r = \frac{1}{2}$
 $\textcircled{2}$ 에서 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 2$
따라서 세 수는 2, 1, $\frac{1}{2}$ 이다.
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$

[다른 풀이] $b^2 = ac$ 이므로 (나)에서 $b^3 = 1 \therefore b = 1$
 $b = 1$ 이므로 $ac = 1$ 이고, (가)에서 $a + c = \frac{5}{2}$ 이므로
 $ab + bc = \frac{5}{2}$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \frac{21}{4}$

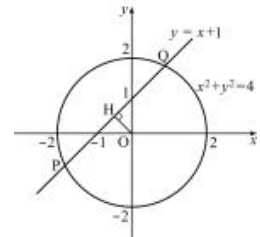
28. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n + 1$ 이라 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ 이지만
수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다. (거짓)
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 2b_n) + 2b_n\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n) + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 + 2 = 2$ (참)
ㄷ. (반례) $a_n = n - \frac{1}{n}, b_n = n, c_n = n + \frac{1}{n}$ 이라 하면
 $a_n < b_n < c_n$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ 이지만
수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

29. [출제의도] 행렬과 두 점 사이의 거리에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

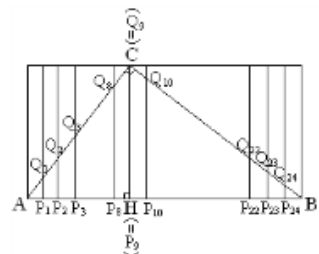
주어진 등식에서
 $\begin{pmatrix} 4(x^2+y^2) - (x-y) & x^2+y^2 \\ x^2+y^2 & -(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로
 $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x-y = -1 \end{cases}$
이를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{OP} = 2$ 이므로 $\overline{PH} = \frac{\sqrt{14}}{2}$
 $\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \sqrt{14}$

30. [출제의도] 수열의 합에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꼭지점 C에서 변AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.
 $\overline{AB} = 25$ 이므로 $\overline{CH} = \frac{15 \times 20}{25} = 12$
 $\overline{AH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ 이고 P_0, Q_0 가 각각 H, C와 일치하므로 $\overline{P_0 Q_0} = \overline{CH} = 12$
삼각형AHC에서
 $\overline{P_1 Q_1} + \overline{P_2 Q_2} + \overline{P_3 Q_3} + \dots + \overline{P_9 Q_9} = (1+2+3+\dots+9)\tan A$
 $= \frac{4}{3} \times \frac{9 \times 10}{2} = 60$
또, 삼각형BHC에서
 $\overline{P_{10} Q_{10}} + \overline{P_{11} Q_{11}} + \dots + \overline{P_{24} Q_{24}} = (15+14+13+\dots+2+1)\tan B$
 $= \frac{3}{4} \times \frac{15 \times 16}{2} = 90$
따라서
 $\overline{P_1 Q_1} + \overline{P_2 Q_2} + \overline{P_3 Q_3} + \dots + \overline{P_{24} Q_{24}} = 60 + 90 = 150$
[다른 풀이] 다음 그림에서



$\overline{P_1 Q_1} + \dots + \overline{P_8 Q_8} + \overline{P_9 Q_9} + \overline{P_{10} Q_{10}} + \dots + \overline{P_{24} Q_{24}}$
 $= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 + 12 + \frac{1}{2} \times 12 \times 15 = 150$