(홀수형)

2006학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1. $5^{\frac{2}{3}}\times 25^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}}\times(5^2)^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{5}{3}}$

$$=5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}=5^{-1}=\frac{1}{5}$$

답 ②

2. $2A+X=AB$에서

$X=AB-2A$

$=AB-2AE$

$=A(B-2E)$

$=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$

답 ②

3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$에서

$x\to 2$일 때 (분자)→0이므로 (분모)→0이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to 2}(x^2-b)=4-b=0$에서 $b=4$

$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x-a}{x+2}$

$=\frac{2-a}{2+2}=3$

$\therefore\ a=-10$

$\therefore\ a+b=-10+4=-6$

답 ①

4. 벡터 $\overrightarrow{OP}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{OQ}=(c,d)$라 하면

$\overrightarrow{OP'}=(a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{OQ'}=(c+3,d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}=(a,b)-(a+3,b+1)$

$=(-3,-1)$

이므로

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄴ.

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=(a+3,b+1)-(c+3,d+1)$

$=(a-c,b-d)$

이므로 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}|$ (참)

ㄷ. (반례)

$\overrightarrow{OP}=(1,1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,2)$일 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1\cdot 1+1\cdot 2=3$이다.

그런데, $\overrightarrow{OP'}=(4,2)$, $\overrightarrow{OQ'}=(4,5)$이므로

$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}=4\cdot 4+2\cdot 5=26$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\neq\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

5. 점 (a,b)는 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점

이므로 $\frac{a^2}{5}-\frac{b^2}{4}=1$ … ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는

F(3, 0), F′(-3, 0)이다.

이 때, 사각형 F′QFP의 넓이는 합동인 두 삼각형 F′QF, FPF′의 넓이와 같으므로

$\square F'QFP=2\times\triangle FPF'$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times|b|$

$=6|b|=24$

$\therefore\ |b|=4\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=25$이므로 $|a|=5$

$\therefore\ |a|+|b|=5+4=9$

답 ①

6. i) $F(x)=xg_1(x)$라 하면

$$F(x)=\begin{cases}|x| & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)=0$이므로

$F(x)=xg_1(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1=N(g_1)=1$

ii) $F(x)=xg_2(x)$라 하면

$$F(x)=\begin{cases}-x^3+x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)=0$이므로

$F(x)=xg_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_2=N(g_2)=1$

iii) $F(x)=xg_3(x)$라 하면

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=$(발산)이므로 $F(x)=xg_3(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또, $F(x)=x^2g_3(x)$라 하면

$$F(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=1\neq 0=F(0)$이므로

$F(x)=x^2g_3(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$F(x)=x^3g_3(x)$라 하면

$$F(x)=\begin{cases}x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)=0$이므로

$F(x)=x^3g_3(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3=N(g_3)=3$

$\therefore\ a_1=a_2<a_3$

답 ①

7. 정육각형의 한 내각의 크기는 $120°$이므로 색칠한 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변의 길이를 a라 하면 6개의 삼각형의 넓이의 합은

$$6\times\frac{1}{2}\times a^2\sin 120°=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=6\sqrt{3}$$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

따라서 주어진 타원의 장축의 길이는 10이고 두 초점 사이의 거리는 $10-2\cdot 2=6$이다.

따라서 이 타원과 합동이고 중심이 원점이고 장축이 x축 위에 있는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이 때, 초점의 좌표는 $(\pm 3, 0)$이어야 하므로

$5^2-b^2=3^2$

$\therefore\ b^2=16$

따라서 구하는 타원의 단축의 길이는

$2\times|b|=2\times 4=8$

답 ④

8. 분수부등식 $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}\leqq 0$의 좌변을 통분하면

$$\frac{x(x-b)}{x-a}+\frac{x(x-a)}{x-b}\leqq 0$$

$$\frac{x(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)}\leqq 0\ \cdots\ ㉠$$

㉠의 양변에 $(x-a)^2(x-b)^2$을 곱하면

$x(2x-a-b)(x-a)(x-b)\leqq 0,$

(단, $x\neq a$, $x\neq b$)

이 때, $a<\dfrac{a+b}{2}<b$이므로 주어진 분수부등식

의 해는

$$0 \leqq x < a \text{ 또는 } \frac{a+b}{2} \leqq x < b$$

$a=1, b=2$일 때 정수인 해가 존재하지 않는다.

$a=1, b=3$일 때 $\frac{a+b}{2}=2$이므로 정수인 해는 $x=0$, $x=2$의 2개이다.

$a=1, b=4$일 때 $\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$이므로 정수인 해는 $x=0$, $x=3$의 2개이다.

$a=1, b \geqq 5$일 때 정수인 해는 세 개 이상이다.

$a=2, b=3$일 때 $\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$이므로 정수인 해는 $x=0$, $x=1$의 2개이다.

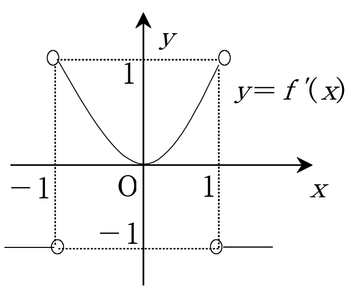
$a=2, b \geqq 4$일 때 정수인 해는 3개 이상이다.

$a \geqq 3$이면 정수인 해는 3개 이상이다.

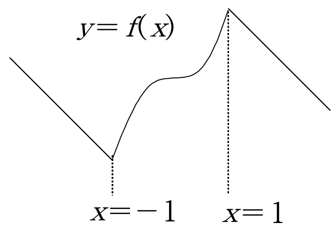
따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$의 3개이다.

답 ③

9. 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 연속함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{x \to -1-0} f'(x)=-1<0$, $\lim_{x \to -1+0} f'(x)=1>0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소값을 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니므로 $f(x)=f(-x)$가 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)>f(0)$이므로 $f(0)=0$이면 $f(1)>0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

10. 좌표공간은 xy평면, yz 평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x>0$, $y>0$, $z>0$인 영역,
② $x>0$, $y>0$, $z<0$인 영역,
③ $x>0$, $y<0$, $z>0$인 영역,
④ $x>0$, $y<0$, $z<0$인 영역,
⑤ $x<0$, $y>0$, $z>0$인 영역,
⑥ $x<0$, $y>0$, $z<0$인 영역,
⑦ $x<0$, $y<0$, $z>0$인 영역,
⑧ $x<0$, $y<0$, $z<0$인 영역,

한편, 주어진 구

$C : (x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

의 중심은 $(-2, 3, 4)$이므로 구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다.

따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 이고, $|-2|<r$, $3<r$, $4<r$이므로 구 C는 yz 평면, zx평면, xy평면에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2+3^2}<r$이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2+4^2}<r$이므로 구 C는 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2+4^2}>r$이므로 구 C는 x축과 만나지 않는다.

따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}>r$이므로 원점의 구 C의 외부에 있다.

따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

답 ③

11. ㄱ. 2006은 4자리의 자연수이므로 $\log 2006$의 지표는 3이다.

$\therefore\ f(2006)=3$ (참)

ㄴ. $\log 2$, $\log 6$의 가수는 각각 $\log 2$, $\log 6$이므로 $g(2)=\log 2$, $g(6)=\log 6$이다.

또, $12=1.2\times 10^1$이므로 $\log 12$의 가수는 $\log 1.2$이다.

$\therefore\ g(12)=\log 1.2$

$\therefore\ g(2)+g(6)=\log 2+\log 6$

$=\log 12=\log 1.2+1=g(12)+1$ (참)

ㄷ. 임의의 양수 x에 대하여

$\log x=$(지표)$+$(가수)$=f(x)+g(x)$이므로

$\log a=f(a)+g(a)$, $\log b=f(b)+g(b)$이고 $\log ab=f(ab)+g(ab)$이다.

그런데, $\log ab=\log a+\log b$이므로

$f(ab)+g(ab)=f(a)+g(a)+f(b)+g(b)$이다.

따라서 $f(ab)=f(a)+f(b)$이면

$g(ab)=g(a)+g(b)$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

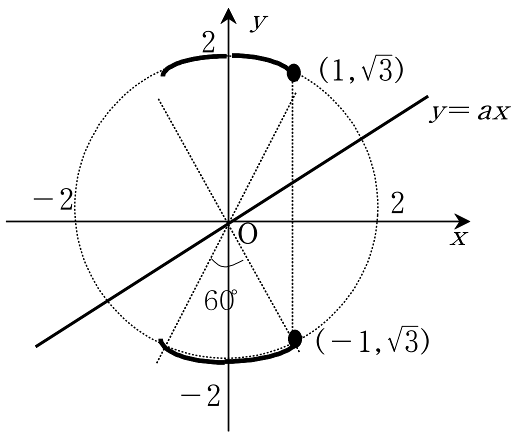
답 ⑤

12. 행렬 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & a \end{pmatrix}$가 역행렬을 가질 조건은

$ax-y\neq 0$ 즉, $y\neq ax$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 원점을 지나고 기울기가 a인 직선 $y=ax$ 위에 있지 않은 점이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 60°인 2개의 호이다.



따라서 구하는 도형의 길이는

$$2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}\times 4\pi=\frac{4}{3}\pi$$

답 ④

13. ㄱ. (반례) $a_{3k}=\frac{1}{2^{3k-1}}\cos\frac{(3k-1)\pi}{2}$ 에

$k=2$를 대입하면

$a_6=\frac{1}{2^5}\cos\frac{5\pi}{2}=\frac{1}{2^5}\cdot 0=0$ (거짓)

ㄴ. $a_{4k-1}=\frac{1}{2^{4k-2}}\cos\frac{(4k-2)\pi}{2}$

$=\frac{1}{2^{4k-2}}\cos(2k-1)\pi=-\frac{1}{2^{4k-2}}$,

$b_{4k-1}=\frac{1+(-1)^{4k-2}}{2^{4k-1}}$

$=\frac{2}{2^{4k-1}}=\frac{1}{2^{4k-2}}$

이므로 $a_{4k-1}+b_{4k-1}=0$ (참)

ㄷ. $\{a_n\}$: 1, 0, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{16}$, 0, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$$

$\{b_n\}$: 1, 0, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{16}$, 0, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14. 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(11,\left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}(11,1^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(10\leqq\overline{X}\leqq 14)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{10-11}{1}\leqq\frac{\overline{X}-11}{1}\leqq\frac{14-11}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leqq Z\leqq 3)$

$=\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1)+\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 3)$

$=0.3413+0.4987=0.84$

이 때, A, B 두 사람이 각각 독립적인 표본을 임의추출하였으므로 두 사람이 뽑은 표본의 표본평균이 10 이상 14 이하일 확률은 모두 0.84로 같고, 두 사건은 서로 독립이다.

따라서 두 표본평균이 모두 10 이상 14 이하일 확률은 $0.84\times 0.84=0.7056$이다.

답 ②

15. l_1은 반지름의 길이가 8, 중심각의 크기가 θ인 호의 길이이므로 $l_1=8\theta$이다.

또, l_2는 반지름의 길이가 $8\sin\theta$, 중심각의 크기가 θ인 호의 길이이므로 $l_2=8\theta\sin\theta$이다.

마찬가지로 $l_3=8\theta\sin^2\theta$, $l_4=8\theta\sin^3\theta$, $\cdots$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 8θ이고 공비가 $\sin\theta$인 무한등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{8\theta}{1-\sin\theta}=12\theta$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{3}$$

답 ⑤

16. $\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$+\{5(m+1)-3\}\frac{1}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$+\frac{5m+2}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left\{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\right\}$

$$+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\frac{1}{m+1}+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$$

$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 $5m+2$, m, $5k-3$이다.

답 ③

17. 주어진 조건을 만족하려면 3개의 가로 행에는 각각 적어도 하나의 검은 색 유리상자가 들어가야 하고, 4개의 세로 열에도 각각 적어도 하나의 검은 상자가 들어가야 한다.
따라서 3개의 가로 행 중에서 2개의 검은 색 유리상자가 포함될 1개의 행을 택하는 방법의 수는 3가지이고, 이 행의 4개의 유리 상자 중에서 검은 색 유리상자로 바뀔 2개의 상자를 택하는 경우는 수는 ${}_4C_2=6$(가지)이다.
이제 위의 3×6=18가지 경우의 수 중의 하나가 아래의 그림과 같다고 하자.

■		■	
	a		c
	b		d

이제 a, b 중에서 한 행을 택하고 c, d 중에서 나머지 한 행을 택하는 방법의 수는 2×1=2(가지)이다.
따라서 구하는 방법의 수는

18×2=36

답 ④

18. $f'(x)=4x^3+8x$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$$

$$=2f'(1)=24$$

답 24

19. 곡선 $y=a(1-x^2)$이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,a)$이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^a x^2dy=\pi\int_0^a\left(1-\frac{y}{a}\right)dy$$

$$=\pi\left[y-\frac{y^2}{2a}\right]_0^a$$

$$=\pi\left(a-\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}\pi=16\pi$$

$$\therefore\ a=32$$

답 32

20. $f(x)=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시키면
$g(x)=(x-a)^3+b$의 그래프가 된다.
$g(0)=-a^3+b=0$이므로

$b=a^3$ ⋯ ㉠

한편, 그래프의 평행이동에 의해

$$\int_a^b g(x)dx=\int_{a-c}^{b-c}g(x+c)dx$$

가 성립함을 이용하면

$$\int_a^{3a}g(x)dx=\int_a^{3a}\{(x-a)^3+b\}dx$$

$$=\int_0^{2a}(x^3+b)dx$$

$$\therefore\ \int_0^{2a}(x^3+b)dx-\int_0^{2a}x^3dx=\int_0^{2a}bdx$$

$$=2ab=32\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2ab=2a^4=32$이므로

$$a^4=16$$

답 16

21. $x^2+y^2+z^2=81$ ⋯ ㉠

$$x^2+(y-5)^2+z^2=56 \cdots ㉡$$

에서 ㉠ - ㉡을 계산하여 정리하면

$$y=5$$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$ 위에 있다. 구의 방정식 ㉠에 $y=5$를 대입하면

$x^2+z^2=56$ ⋯ ㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$$x^2+z^2=56, \quad y=5$$

이 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,0,z)$의 xy평면 위로의 정사영은 $\mathrm{P}'(x,5,0)$이고, 두 점 Q, R의 좌표는 각각 (0, 9, 0), (0, –9, 0)이므로 삼각형 QP′R의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{QR}\cdot|x|=9|x|$$

이 때, 사면체 PQP′R의 높이는 $|z|$이므로 이 사면체의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|z|=3|xz|$$

그런데, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의해

$$x^2+z^2=56\geqq 2\sqrt{x^2z^2}=2|xz|$$

이므로 $|xz|\leqq 28$

$$\therefore \ V=3|xz|\leqq 3\cdot 28=84$$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최대값은 84이다.

답 84

22. 확률의 합은 1이므로

$$\frac{4}{7}+a+b=1 \cdots ㉠$$

$\frac{4}{7}$, a, b가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$a^2=\frac{4}{7}b \cdots ㉡$$

$$E(X)=k\cdot\frac{4}{7}+2k\cdot a+4k\cdot b$$

$$=\frac{k}{7}(4+14a+28b)=24 \cdots ㉢$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$a=\frac{2}{7}, \ b=\frac{1}{7} \ (\because \ a>0)$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$k=14$$

답 14

23. A영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{3}{4}$,

B영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

이 때, 3번째 시행에서 마치는 경우는

A, A, B의 순서로 칠하거나,

B, B, A의 순서로 칠하게 되는 경우이다.

이 때, 위의 각 경우의 확률은 각각

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64},$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$$

$$\therefore \ p+q=16+3=19$$

답 19

24. 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=4$에 $z=-1$을 대입하면 $x^2+y^2=3$이므로 원 C는 중심이 (0, 0, −1), 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 평면 $z=-1$에 놓인 원이다.
이 때, x축을 포함하고 이 원과 오직 한 점에서 만나는 평면 α는 두 점 O(0, 0, 0), A(0, $\sqrt{3}$, −1) (또는 B(0, $-\sqrt{3}$, 0))을 지나야 한다.
따라서 평면 α는 x축과 직선 OA (또는 OB)를 포함한다.
이 때, x축의 방향벡터는
$\vec{x}=(1,0,0)$
이고 직선 OA의 방향벡터 (또는 직선 OB의 방향벡터)는
$\vec{a}=(0,\sqrt{3},-1)$ (또는 $\vec{b}=(0,-\sqrt{3},-1)$)
이므로 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 벡터 $\vec{x}$와 벡터 $\vec{a}$ (또는 $\vec{b}$)와 각각 수직이어야 한다.
그런데 한 법선벡터가 $\vec{n}=(a,3,b)$이므로
$\vec{n}\cdot\vec{x}=(a,3,b)\cdot(1,0,0)=0$에서 $a=0$이고,
$\vec{n}\cdot\vec{a}=(a,3,b)\cdot(0,\sqrt{3},-1)=0$에서
$3\sqrt{3}-b=0$ ∴ $b=3\sqrt{3}$

$$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$$

답 27

참고)
$\vec{n}\cdot\vec{b}=(a,3,b)\cdot(0,-\sqrt{3},-1)=0$일 경우에도 $3\sqrt{3}+b=0$이므로 $b=-3\sqrt{3}$이다.

$$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$$

25. $\log\frac{C}{C_0}=-kt$에
$C_0=8\times10^5$, $t=3$, $C=2\times10^5$을 대입하면
$\log\frac{1}{4}=-3k$ ∴ $k=\frac{\log 4}{3}=\frac{2}{3}\log 2$

따라서 $\log\frac{C}{C_0}=-kt$에
$C_0=8\times10^5$, $t=a$, $C=8\times10^3$을 대입하면
$\log\frac{1}{100}=-\frac{2a}{3}\log 2$

$$\therefore\ -2=-\frac{2a}{3}\times0.3$$

$$\therefore\ a=10$$

답 10

<미분과 적분>

26. $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sec2\theta-1}{\sec\theta-1}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos2\theta}-1}{\dfrac{1}{\cos\theta}-1}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}}{\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\cos2\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\cos\theta}{\cos2\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos2\theta}{1-\cos\theta}$ $\left(\because\ \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\cos\theta}{\cos2\theta}=\dfrac{1}{1}=1\right)$

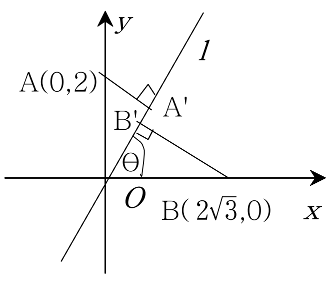
$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{2-2\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$ $(\because\ \cos2\theta=2\cos^2\theta-1)$

$=2\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$

$=2\lim\limits_{\theta\to0}(1+\cos\theta)=2(1+1)=4$

답 ④

27. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 θ이므로 다음 그림에서



$\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sin\theta,$

$\overline{OB'}=\overline{OB}\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore\ \overline{OA'}+\overline{OB'}=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$

$=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leq4$

(단, 등호는 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 즉, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 성립한다.)

따라서 $\overline{OA'}+\overline{OB'}$이 최대가 되는 θ의 값은 $\dfrac{\pi}{6}$이다.

답 ②

28. ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_n^{n+1}f(x)dx$는 곡선 n $y=f(x)$와 두 직선 $x=n$, $x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P'_n, Q'_n이라 하면 직사각형 $P_nP'_nQ'_nQ_n$의 넓이는

$$(n+1-n)\times f(n)=f(n)$$

이다.

$\therefore\ \int_n^{n+1}f(x)dx=f(n)-(A_n+B_n)$ (참)

ㄴ. $A_n=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\{f(n)-f(n+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}(e^{-n}-e^{-n-1})$

$=\dfrac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$

$=\dfrac{e-1}{2}\cdot\dfrac{1}{e^{n+1}}$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\dfrac{1}{e}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\dfrac{\dfrac{e-1}{2e^2}}{1-\dfrac{1}{e}}=\dfrac{1}{2e}$ (참)

ㄷ. $\int_{n}^{n+1} f(x)dx = \int_{n}^{n+1} e^{-x}dx$

$$= [-e^{-x}]_{n}^{n+1}$$

$$= -e^{-n-1} + e^{-n} = 2A_n$$

이므로 ㄱ에서

$$B_n = f(n) - 3A_n$$

그런데,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

$$= \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - 3\sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

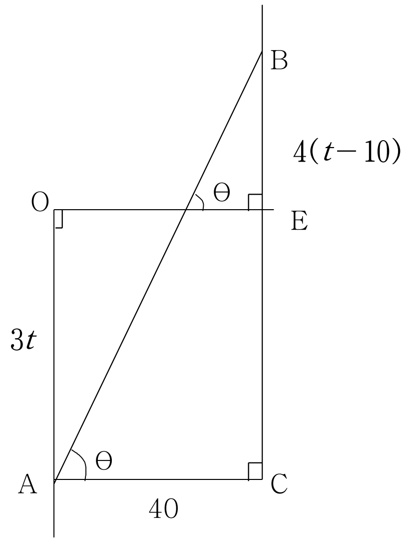
$$= \frac{1}{e-1} - \frac{3}{2e}$$

$$= \frac{2e-3(e-1)}{2e(e-1)} = \frac{3-e}{2e(e-1)} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29. 지점 O로부터 갑이 출발한 지 t초가 지난 후 갑과 을의 위치를 각각 A, B라 하면 $\overline{OA} = 3t$, $\overline{OB} = 4(t-10)$이다.



따라서 위의 그림에서

$\overline{BC} = 7t - 40$, $\overline{AC} = 40$

이므로

$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{7t-40}{40} \quad \cdots ㉠$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40} \cdot \frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$= \frac{7}{40} \cdot \frac{1}{1+\tan^2\theta} \quad \cdots ㉡$$

㉠에 $t = 20$을 대입하면

$\tan\theta = \frac{5}{2}$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40} \cdot \frac{1}{1+\frac{25}{4}} = \frac{7}{40} \cdot \frac{4}{29}$$

$$= \frac{7}{290} \text{ (라디안/초)}$$

답 ③

30. 폐구간 $[-a, a]$에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$ 에서 $x-5=t$로 놓으면 구하는 함수의 최대값과 최소값은

폐구간 $[-a-5,\ a-5]$에서 정의된 함수

$f(t)=\dfrac{t}{t^2+36}$ 의 최대값과 최소값과 같다.

이제 함수 $f(t)=\dfrac{t}{t^2+36}$ 의 그래프의 개형을 그려보자.

i) $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

ii) $t>0$일 때 $f(t)>0$이고, $t<0$일 때 $f(t)<0$이다.

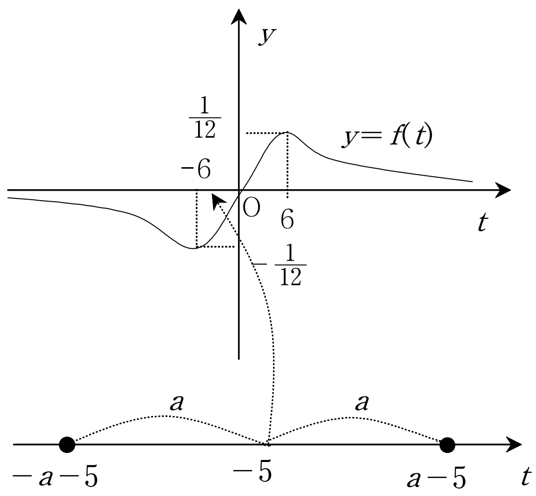
iii) $f(-t)=-f(t)$이므로 $y=f(t)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

iv)

$$f'(t)=\frac{1(t^2+36)-t\cdot 2t}{(t^2+36)^2}=\frac{36-t^2}{(t^2+36)^2}=0$$

에서 $t=6$ 또는 $t=-6$이고 $f'(t)$의 분모는 항상 0보다 크므로 $f(x)$는 $t=-6$에서 극소이고 $t=6$에서 극대이다.

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 때, 폐구간 $[-a-5,\ a-5]$은 $t=-5$에 대하여 대칭인 구간이므로 함수 $y=f(t)$의 최대값 M과 최소값 m에 대하여 $M+m=0$ 즉, $m=-M$을 만족하려면 폐구간 $[-a-5,\ a-5]$은 $t=-6$과 $t=6$을 모두 포함해야 한다.

$\therefore\ -a-5\leqq-6$이고 $a-5\geqq6$

$\therefore\ a\geqq1$ 이고 $a\geqq11$

$\therefore\ a\geqq11$

따라서 구하는 a의 최소값은 11이다.

답 11

<확률과 통계>

26. 주어진 줄기와 잎 그림에서 자료를 나열하면 다음과 같다.

5, 10, 10, 15, 20, 20, 20, 25, 25, 30

따라서 평균 m과 중앙값 M은

$$m=\frac{5+10+10+15+20+20+20+25+25+30}{10}=18$$

$M=20$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-m)^2=\sum_{i=1}^{10}\{x_i-M-(m-M)\}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{10}\{(x_i-M)^2-2(x_i-M)(m-M)+(m-M)^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{10}(x_i-M)^2-\sum_{i=1}^{10}\{2(x_i-M)(m-M)-(m-M)^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{10}(x_i-M)^2-\sum_{i=1}^{10}\{2(x_i-20)\cdot(-2)-(-2)^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{10}(x_i-M)^2-\sum_{i=1}^{10}(-4x_i+76)$$

$$=\sum_{i=1}^{10}(x_i-M)^2-(-4\times180+760)$$

$$=\sum_{i=1}^{10}(x_i-M)^2-40$$

$\therefore$ (가) $=40$

답 ⑤

27. 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x}{15}$ $(x=1,2,3,4,5)$

이므로 확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

이 때,

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{9}{15}+\frac{16}{15}+\frac{25}{15}=\frac{11}{3}$

한편,

$$g(t)=\sum_{x=1}^{5}\mathrm{P}(X=x)\cdot t^x$$

$$=\frac{1}{15}(t+2t^2+3t^3+4t^4+5t^5)$$

$$g'(t)=\frac{1}{15}(1+4t+9t^2+16t^3+25t^4)$$

$$g'(1)=\frac{1}{15}(1+4+9+16+25)=\frac{11}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(2X)-g'(1)=2\mathrm{E}(X)-g'(1)$$

$$=\frac{11}{3}$$

답 ②

28. ㄱ. $n=100$, $\hat{p}=\frac{1}{5}$일 때, 비율 p를 신뢰도 95%로 추정하면 신뢰구간은

$$\frac{1}{5}-1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}\leqq p$$

$$\leqq\frac{1}{5}+1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}$$

$\therefore$ $0.1216\leqq p\leqq0.2784$ (참)

ㄴ. 표본의 크기가 n이고

$$\mathrm{P}\left(\hat{p}-k\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}\leqq p\leqq\hat{p}+k\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}\right)$$

인 경우에 신뢰도 $(a\times100)$%에 대한 최대 허용 표본오차는 $k\sqrt{\frac{1}{4n}}$이므로

신뢰도 95%일 때,

$n=400$인 경우 최대 허용 표본오차 l은

$$l=1.96\sqrt{\frac{1}{1600}}=1.96\times\frac{1}{40}$$

$n=100$인 경우 최대 허용 표본오차 l'는

$$l'=1.96\sqrt{\frac{1}{400}}=1.96\times\frac{1}{20}$$

따라서 l은 l'의 $\frac{1}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. $n=50$인 표본을 100번 임의추출하여 비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간 100개를 구해보면 이 중 약 95개는 비율 p를 포함한

다. 이는 신뢰구간의 의미를 설명하는 옳은 내용이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

29. 갑이 상자 B를 선택하였을 때, 을의 판단이 틀리는 경우는 을이 (가)를 판단하는 경우이다. 즉, 을의 판단이 틀릴 확률은 갑이 상자 B를 선택하여 주어진 조건의 시행을 할 때, 빨간 공이 3회 이하 나오는 경우이다.
따라서 구하는 확률은 여사건의 확률을 이용하면

$$1-\left\{ {}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+ {}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}=\frac{131}{3^5}$$

답 ③

30. 네 사람을 세 명과 한 명의 두 조로 나누고 다섯 곳이 휴양지에서 두 곳을 선택하여 배치하는 방법의 수이므로
${}_4C_3\times{}_1C_1\times{}_5P_2=80$ (가지)

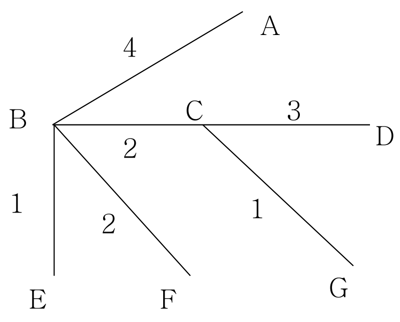
답 80

<이산수학>

26. 주어진 그래프의 꼭지점을 적절하게 색칠하는 최소의 색의 수는 4가지이다.
이 때, 보기의 그래프의 꼭지점을 적절하게 색칠하는 최소의 색의 수는 각각 다음과 같다.
① : 4가지
② : 3가지
③ : 2가지
④ : 2가지
⑤ : 5가지

답 ①

27. 상수도관을 설치하는 데 필요한 비용이 최소가 되도록 하는 수형도는 다음과 같다.



따라서 구하는 최소비용은
4+1+2+2+1+3=13(억원)이다.

답 ⑤

28. $L_n - L_{n-1} = L_{n-2}$에 $n=3,4,5,\cdots$을 차례로 대입하면
$L_3 - L_2 = L_1$,
$L_4 - L_3 = L_2$,
$L_5 - L_4 = L_3$,
$\cdots$
$L_{12} - L_{11} = L_{10}$
각 변끼리 더하여 정리하면
$L_{12} - L_2 = L_1 + L_2 + \cdots + L_{10}$ $\cdots$ ㉠
한편,
$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$,
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
의 각 변끼리 빼면
$L_n - F_n = (L_{n-1} - F_{n-1}) + (L_{n-2} - F_{n-2})$
$\cdots$ ㉡
㉡에 $n=3,4,5,\cdots$을 차례로 대입하면
$L_3 - F_3 = (L_2 - F_2) + (L_1 - F_1) = F_1$
$L_4 - F_4 = (L_3 - F_3) + (L_2 - F_2) = F_1 = F_2$
$L_5 - F_5 = (L_4 - F_4) + (L_3 - F_3)$
$= F_2 + F_1 = F_3$
$L_6 - F_6 = (L_5 - F_5) + (L_4 - F_4)$
$= F_3 + F_2 = F_4$
$\cdots$
$L_{12} - F_{12} = F_{10}$
$\therefore$ $L_{12} = F_{12} + F_{10}$ $\cdots$ ㉢
㉠, ㉢에서
$L_1 + L_2 + \cdots + L_{10} = L_{12} - L_2$
$= F_{12} + F_{10} - 1$ ($\because$ $L_2 = 1$)

답 ②

29. 주어진 조건을 만족하도록 각 경우의 회로를 연결된 꼭지점의 순서대로 나열하면 다음과 같다.
① $a-b-f-e$, $c-d-h-g$,
$i-j-n-m$, $k-l-p-o$
와 같이 꼭지점의 개수가 4개인 회로 4개로 분할하는 방법의 수는 1개이다.

② $a-b-f-e,\ c-d-h-g,$

$i-j-k-l-p-o-n-m$

와 같이 꼭지점의 개수가 4개인 회로 2개와 꼭지점의 개수가 8개인 1개의 회로로 분할하는 방법의 수는 4가지이다.

③ $a-b-f-e,$

$c-d-h-l-p-o-n-m-i-j-k-g$

와 같이 꼭지점의 개수는 4개인 회로 1개와 꼭지점의 개수가 12개인 1개의 회로로 분할하는 방법의 수는 4가지이다.

④ $a-b-f-j-n-m-i-e,$

$c-d-h-l-p-o-k-g$

와 같이 꼭지점의 개수가 각각 8개인 2개의 회로로 분할하는 방법의 수는 2가지이다.

⑤ $a-b-c-d-h-l-p-o-n-m-i-e,$

$f-g-k-j$

와 같이 분할하는 경우의 수는 1가지이다.

이상에서 구하는 방법의 수는

1+4+4+2+1=12

답 ③

30. i) 초콜릿사탕 4개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 5개의 사탕을 추가로 택하면 된다.

이 때, 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = 21$$

ii) 초콜릿사탕 3개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 6개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_2 = 28$$

iii) 초콜릿사탕 2개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 7개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_2 = 36$$

iv) 초콜릿사탕 1개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 8개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

v) 초콜릿사탕 0개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 9개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$21+28+36+45+55=185$$

답 185