샘플① : 1강 일차독립·종속,기저,내적

제 1 장 중요한 기본개념

Def (1): 일차독립(linearly independence)

벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합을 S라 하자.
집합 S에 속하는 임의의 유한 개의 벡터 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n$에 대하여
$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \cdots + k_n\mathrm{v}_n = 0$일 때 항상 $k_1 = \cdots = k_n = 0$이면
S를 **일차독립**이라 한다.
일차독립이 아니면 S를 **일차종속**이라고 한다.

예제 1

다음 각 경우에 답하여라.

(1) 벡터공간 R^3의 세 벡터 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$은 일차독립임을 보여라.

(2) 벡터공간 R^3의 세 벡터 $\mathrm{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathrm{v}_2 = (3, 1, 0)$, $\mathrm{v}_3 = (1, -3, 2)$는 일차종속임을 보여라.

예제 2

n개의 벡터 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n$이 일차종속이기 위한 필요충분조건은 적어도 하나의 벡터 v_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$는 나머지 $n-1$개의 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 있음임을 보여라.

Def (2) : 기저(basis)

벡터공간 V의 n개의 0이 아닌 벡터 v_1, v_2, $\cdots$, v_n이 다음 두 조건을 만족할 때 v_1, v_2, $\cdots$, v_n을 벡터공간 V의 **기저**라 한다.

(1) v_1, v_2, $\cdots$, v_n이 일차독립이다.

(2) V의 임의의 벡터는 벡터 v_1, v_2, $\cdots$, v_n의 일차결합으로 표시된다.
(= v_1, v_2, $\cdots$, v_n은 V를 생성한다)

⇒ ① 벡터공간 V를 생성하는 기저에 속하는 벡터의 개수는 항상 일정하다.
② 만약 기저의 개수가 n개이면 n을 벡터공간 V의 차원(dimension)이라 한다.

예제 3

R^3공간에서 세 벡터 $v_1=(1,\ 2,\ 1)$, $v_2=(2,\ 9,\ 0)$, $v_3=(3,\ 3,\ 4)$가 기저임을 보여라.

Def (4) : 내적(inner product)

V가 벡터공간일 때 모든 벡터 u, v, $w \in V$와 r, $s \in R$에 대하여 다음을 만족하는 함수 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to R$를 **내적**이라 한다.

(1) $\langle u,\ v\rangle = \langle v,\ u\rangle$

(2) $\langle u,\ rv+sw\rangle = r\langle u,\ v\rangle + s\langle u,\ w\rangle$

(3) $\langle u,\ u\rangle \geq 0$이고 $u=0$일 때만 등호가 성립한다.

⇒

예제 4　Cauchy-Schwarz 부등식

내적공간 V의 임의의 두 벡터 u, v에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$|\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle| \le |\mathrm{u}||\mathrm{v}|$ (단, 등호는 u, v가 일차종속일 때만 성립한다.)

예제 5　삼각부등식

V가 내적공간일 때 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$에 대하여

부등식 $|\mathrm{u}+\mathrm{v}| \le |\mathrm{u}|+|\mathrm{v}|$ (단, 등호는 u, v가 일차종속일 때만 성립)

이 성립함을 보여라.

Def (4): 직교(orthogonal)

$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 0$일 때 벡터 u, v는 **직교**한다고 한다.

특히, $|\mathrm{u}| = |\mathrm{v}| = 1$이면서 u와 v가 직교할 때

u와 v는 **정규직교**라 한다.

예제 6　피타고라스 정리

두 벡터 u와 v가 직교하면 $|\mathrm{u}+\mathrm{v}|^2 = |\mathrm{u}|^2 + |\mathrm{v}|^2$임을 보여라.