(홀수형)

2007학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$(\log_3 27)\times 8^{\frac{1}{3}} = \log_3 3^3 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 3\times 2 = 6$

답 ④

2.

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 이므로

$(A+B)^{-1}=\frac{1}{4-3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$4-1-3+1=1$

답 ①

3.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$

답 ②

4.

$f(x)$는 $x=3$일 때 최대값 $M=4^3=64$를 갖고,

$g(x)$는 $x=3$일 때 최소값 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=8$

답 ①

5.

$A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$

답 ③

6.

a, 0, b가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$a+b=2\cdot 0$

$\therefore\ a+b=0\ \cdots$ ㉠

$2b$, a, -7이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$a^2=-7\times 2b$

$\therefore\ a^2=-14b\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a^2=14a$

$\therefore\ a=14\ (\because\ a\neq 0)$

답 ③

7.

$(x-a)^5$의 전개식에서 x항은

${}_5C_1 x^1(-a)^4=5a^4x$

$(x-a)^5$의 전개식에서 상수항은

${}_5C_0 x^0(-a)^5=-a^5$

이 때, $5a^4-a^5=a^4(5-a)=0$ 이므로

$a=5\ (\because\ a\neq 0)$

답 ⑤

8.

$\log_a c$: $\log_b c = 2:1$ 이므로 $\log_a c = 2\log_b c$

이 때, $\dfrac{1}{\log_c a} = \dfrac{2}{\log_c b}$ 이므로

$\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b = 2$

$\therefore\ \log_a b + \log_b a = \log_a b + \dfrac{1}{\log_a b} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

답 ④

9.

세차시간 X는 정규분포 $N(30, 2^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X \geqq 33) = \mathrm{P}\left(\frac{X-30}{2} \geqq \frac{33-30}{2}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geqq 1.5)$$
$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.5)$$
$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

답 ②

10.

표본의 크기 100이 충분이 크므로 모표준편차 σ는 표본표준편차로 대신할 수 있다.

즉, $\sigma = 20$, $n = 100$이고 표본평균이 $\overline{X} = 245$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$에서

$$\left[245 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}},\ 245 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\therefore\ [241.08,\ 248.92]$$

따라서 이 신뢰구간에 속하는 정수는 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248의 7개다.

답 ③

11.

$I(t) = 10 + 990 \times a^{-5t}$에 $I(t) = 21$을 대입하면

$21 = 10 + 990 \times a^{-5t}$이므로 $a^{-5t} = \dfrac{11}{990}$

$\therefore\ a^{5t} = \dfrac{990}{11} = 90$

$\therefore\ 5t = \log_a 90 = \dfrac{\log 9 \times 10}{\log a} = \dfrac{2\log 3 + 1}{\log a}$

$\therefore\ t = s = \dfrac{1 + 2\log 3}{5\log a}$

답 ①

12.

ㄱ. $B^2 = B$의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$B^{-1}B^2 = B^{-1}B$

$\therefore\ B = E$ (참)

ㄴ. $(E-A)^2 = E - 2A + A^2$

$= E - 2A + E = 2(E-A)$

$(E-A)^3 = (E-A)^2(E-A) = \{2(E-A)\}(E-A)$

$= 2(E-A)^2 = 2^2(E-A)$

…

$\therefore\ (E-A)^5 = 2^4(E-A)$ (참)

ㄷ. $(E-ABA)^2 = E - 2ABA + (ABA)^2$

이 때,

$(ABA)^2 = (ABA)(ABA) = ABA^2BA$

$= ABEBA = AB^2A = ABA$ 이므로

$(E-ABA)^2 = E - 2ABA + ABA = E - ABA$

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13.

$A(n)=\{x|\ 0<x\le 2^n\}$, $B(n)=\{x|\ 0<x\le 4^n\}$ 이다.

ㄱ. $2^1=2$ 이므로

$A(1)=\{x|\ 0<x\le 2\}$ (거짓)

ㄴ. $2^4=4^2$ 이므로

$A(4)=B(2)=\{x|\ 0<x\le 16\}$ (참)

ㄷ. $A(n)\subset B(n)$ 이면 $0<2^n\le 4^n$ 이므로 $2^{-n}\ge 4^{-n}>0$ 이다.

$\therefore\ B(-n)\subset A(-n)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14.

3개의 상자 A, B, C에 서로 다른 5개의 공을 임의로 넣는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

이 때, 상자에 있는 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 상자는 많아야 1개이므로 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 경우가 존재하려면 세 상자 중 어느 한 상자에는 3, 4, 5가 적힌 공은 반드시 들어가고 또한, 이 상자에 1, 2가 적힌 공 중 적어도 하나가 들어가야 한다.

따라서 이 경우의 수는

$${}_3C_1\times({}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2)=3(9-4)=15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$243-15=228$$

답 ②

다른 풀이

3개의 상자 A, B, C에 서로 다른 5개의 공을 임의로 넣는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

이 때, 상자에 있는 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 상자가 존재하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 세 상자 중 어느 한 상자에 1, 3, 4, 5가 들어가고 2는 나머지 두 상자 중 어느 하나에 들어가는 경우의 수는

$3\times 2=6$ (가지)

(ii) 세 상자 중 어느 한 상자에 2, 3, 4, 5가 들어가고 1은 나머지 두 상자 중 어느 하나에 들어가는 경우의 수는

$3\times 2=6$ (가지)

(iii) 세 상자 중 어느 한 상자에 1, 2, 3, 4, 5가 들어가는 경우의 수는

3 (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$243-(6+6+3)=228$

15.

$3n$장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$ 이다.

$a=k\quad(k=1,2,3,\cdots,n-1)$이면 $3a<b$를 만족시키는 b는 $3k+1, 3k+2,\cdots,3n$ 중의 하나이어야 하므로 b의 경우의 수는 $3n-3k=3(n-k)$ 이다.

$$\therefore\quad \mathrm{P}_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(n-k)}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$$

이 때,

$$\sum_{k=1}^{n-1}3(n-k)$$

$=3n(n-1)-\frac{3}{2}n(n-1)=\frac{3}{2}n(n-1)$ 이므로

$$\mathrm{P}_n=\frac{\frac{3}{2}n(n-1)}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$$

이 때, ${}_{3n}\mathrm{C}_2=\frac{3n(3n-1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2-3n}{2}}{\frac{9n^2-3n}{2}} = \frac{1}{3}$$

이상에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은

$$3(n-k),\ \frac{3}{2}n(n-1),\ \frac{1}{3}$$

이다.

답 ①

16.

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 정사각형 A_n과 만날 필요충분조건은 두 점

$(4n^2,\ n^2)$, $(n^2,\ 4n^2)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만날 때이다.

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(4n^2,\ n^2)$을 지날 조건은

$$n^2 = k\sqrt{4n^2} \qquad \therefore\ k=\frac{n}{2}$$

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(n^2,\ 4n^2)$을 지날 조건은

$$4n^2 = k\sqrt{n^2} \qquad \therefore\ k=4n$$

따라서 a_n은 부등식 $\frac{n}{2} \le k \le 4n$을 만족하는 자연수 k의 개수이다.

(i) n이 홀수일 때

$$a_n = 4n - \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$$

(ii) n이 짝수일 때

$$a_n = 4n - \frac{n}{2}+1 = \frac{7}{2}n+1$$

$$\therefore\ a_n = \begin{cases} \frac{7}{2}n+\frac{1}{2} & (n\text{이 홀수}) \\ \frac{7}{2}n+1 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

ㄱ. $a_5 = \frac{7}{2}\times 5 + \frac{1}{2} = 18$ (거짓)

ㄴ.

$$a_{n+2} = \begin{cases} \frac{7}{2}(n+2)+\frac{1}{2} = a_n+7 & (n\text{이 홀수}) \\ \frac{7}{2}(n+2)+1 = a_n+7 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore\ a_{n+2}-a_n = 7 \text{ (참)}$$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = (a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_9+a_{10})$

$= 12+(12+14)+(12+2\times 14)+\cdots+(12+4\times 14)$

$= \frac{5}{2}\{12+(12+56)\} = 200$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

17.

R_1의 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 빗변의 길이는 $3a$이므로 $3a=\sqrt{2}$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore\ S_1 = a^2 = \frac{2}{9}$$

R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 R_1에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_1에서 새로 색칠한 2개의 정사각형의 넓이의 합은 $2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2$이다.

$$\therefore\ S_2 = S_1 + 2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{4}{9}$$

R_2에서 합동인 2^2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ 이므로 R_2에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는

$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_2에서 새로 색칠한 2^2개의 정사각형의 넓이의 합은

$2^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{9}\right)^2 = 4 \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2$이다.

$$\therefore \ S_3 = S_2 + \frac{2}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$$
$$\cdots$$

이와 같은 방법으로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합과 같음을 추론할 수 있다.

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}$$

답 ⑤

18.

수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, a_3, a_6, a_9도 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(a_6)^2 = a_3 \times a_9$

$\therefore \ a_9 = \frac{16^2}{2} = 128$

답 128

다른 풀이

공비를 r라 하면 $\frac{a^6}{a^3} = \frac{16}{2} = r^3$이므로

$r^3 = 8$ 이다.

$\therefore \ a_9 = a^6 \times r^3 = 16 \times 8 = 128$

19.

$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x = \log_2 x(\log_2 x - 4) = 0$ 에서

$\log_2 x = 0$ 또는 $\log_2 x = 4$

$\therefore \ x = 1$ 또는 $x = 2^4 = 16$

$\therefore \ \alpha + \beta = 1 + 16 = 17$

답 17

20.

등비수열의 수렴조건은 $-1 < (\text{공비}) \leq 1$이므로

$-1 < \frac{2x-1}{4} \leq 1$ $\qquad \therefore \ -\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$

따라서 정수 x의 개수는 -1, 0, 1, 2의 4개다.

$\therefore \ k = 4$

$\therefore \ 10k = 40$

답 40

21.

$(A+E)^2 = A^2 + 2A + E = A$ 이므로

$A(A+E) = -E$에서 $A(-A-E) = E$

$\therefore \ A^{-1} = -A - E$

$\therefore \ A + A^{-1} = -E$

따라서 $(A + A^{-1})\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -E\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\therefore \ p^2 + q^2 = 9 + 49 = 58$

답 58

22.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d\neq0)$라 하면

$$a_n=(n-1)d$$

$$\therefore\ a_{n+1}=dn$$

이 때,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}d(k-1)$$

$$=d\sum_{k=1}^{n-1}k=d\times\frac{n(n-1)}{2}$$

이고,

$a_{n+1}b_n=dn\cdot b_n=\dfrac{dn(n-1)}{2}$ 이어야 하므로

$$b_n=\frac{n-1}{2}\ \ (\text{단, } n=1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore\ b_{27}=\frac{27-1}{2}=13$$

답 13

23.

어른 2명은 반드시 앞줄과 뒷줄에 한 명씩 앉아야 하므로 어른을 앉히는 방법의 수는

$${}_2C_1\times{}_2P_1\times{}_3P_1=12$$

어린이 3명을 나머지 3개의 자리에 앉히는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 경우의 수는 $12\times6=72$

답 72

다른 풀이

5명을 5개의 자리에 앉히는 경우의 수는

$$5!=120$$

어른 2명은 모두 앞줄에 앉고, 어린이 3명은 모두 뒷줄에 앉는 경우의 수는

$$2!\times3!=12$$

어른 2명은 모두 뒷줄에 앉고, 어린이 3명은 나머지 3개의 자리에 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2\times3!=36$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120-(12+36)=72$$

24.

$0\leq X\leq a$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2}\times ab=1\ \ \therefore\ ab=2\ \cdots\ ㉠$$

$\mathrm{P}\left(0\leqq X\leqq\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{b}{2}<\mathrm{P}(0\leqq X\leqq2)=b$이 므로 $\dfrac{a}{2}<2$이다.

이 때,

$$\mathrm{P}\left(0\leqq X\leqq\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\left(\frac{b}{2}\times\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{8}$$

이므로 $\dfrac{a}{8}=\dfrac{b}{2}\ \ \therefore\ a=4b$

㉠에서 $a^2=8,\ b^2=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ a^2+4b^2=8+2=10$$

답 10

25.

점 P의 x좌표를 α라 하면

$$k\cdot3^{\alpha}=3^{-\alpha}$$

따라서 $k\cdot3^{\alpha}=\dfrac{1}{3^{\alpha}}$ 이므로 양변에 3^{α}을 곱하여 정리하면

$$(3^{\alpha})^2=3^{2\alpha}=\frac{1}{k}$$

이 때, 점 Q의 x좌표는 2α이므로

$$k\cdot 3^{2a}=-4\cdot 3^{2a}+8$$

이 때, $3^{2a}=\dfrac{1}{k}$ 이므로

$$k\cdot\frac{1}{k}=-4\cdot\frac{1}{k}+8$$

$k>0$ 이므로 $1=-\dfrac{4}{k}+8$

$$\therefore\ k=\frac{4}{7}$$

$$\therefore\ 35k=20$$

답 20

26.

$a_1=2$ 이므로 $a_{n+1}=2a_n+2$ 에

$n=1,2,3,\cdots,9$ 를 차례로 대입하면

$a_2=2\times2+2=6$,

$a_3=2\times6+2=14$,

$a_4=2\times14+2=30$,

$a_5=2\times30+2=62$,

$a_6=2\times62+2=126$,

$a_7=2\times126+2=254$,

$a_8=2\times254+2=510$,

$a_9=2\times510+2=1022$,

$a_{10}=2\times1022+2=2046$

답 ④

27.

$0<x<1$ 일 때, $1<10^x<10$ 이므로

3으로 나눈 나머지가 2인 자연수 10^x는

$$10^x=2,\ 5,\ 8$$

$\therefore\ x=\log2,\ \log5,\ \log8$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$$\log2+\log5+\log8=\log2\times5+3\log2=1+3\log2$$

답 ③

28.

ㄱ. 세 개의 동전을 던질 때 앞면의 수가 1이하일 확률은

$$\mathrm{P(A)}={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}\ \text{(참)}$$

ㄴ. 3개 모두 같은 면이 나오는 동시에 앞면의 수가 1이하일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\ \text{(참)}$$

ㄷ. 3개 모두 같은 면이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(B)=2\times{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29.

두 버튼을 누를 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$ 이고, 여섯 번 중에서 채널증가 버튼과 채널감소 버튼을 각각 3번씩 눌러야 하므로 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{2^6}=\frac{5}{16}$$

답 ②

다른 풀이

↑, ↓ 중 중복을 허락하여 6개를 임의로 나열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_6=2^6$$

↑ 3개, ↓ 3개를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!}=20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5\cdot 4}{2^6}=\frac{5}{16}$$

30.

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & p\end{pmatrix}$ 이므로 $A^2=\begin{pmatrix}1 & p\\ 0 & p^2\end{pmatrix}$,

$5A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 0 & 5p\end{pmatrix}$ 이다.

$$\therefore\ D(A^2)=p^2,\ D(5A)=25p$$

따라서 $p^2=25p$이므로

$$p=0 \text{ 또는 } p=25$$

따라서 모든 상수 p의 값의 합은 25이다.

답 25