5강

불확정성과 시간 의존성

레니: 안녕하십니까, 장군님. 다시 뵙게 되어 반갑습니다.

장군: 레니? 자네인가? 이게 얼마만인가.

그래, 어쨌든 오래되었네. 자네 친구는 누구지?

레니: 아트입니다. 아트, 불확정성 장군님과 악수하게.

연습 문제 5.1: 이 주장을 확인해 보라.

> 임의의 2×2 에르미트 행렬 L은 다음과 같이 네 항의 합으로 쓸 수 있다. 이때 a, b, c, d는 실수이다.
>
> $$L = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z + dI.$$

해답: 우선 주어진 식에 σ를 대입해 보자.

$$L = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c+d & a-bi \\ a+bi & -c+d \end{pmatrix}.$$

이때 L이 에르미트 이므로 대각 원소는 모두 실수이며 나머지 원소는 서로 복소 켤레여야 하므로 행렬 L을 다음처럼 나타 낼 수 있다.

$$L = \begin{pmatrix} r & w \\ w^* & r' \end{pmatrix}.$$

따라서 $a = \dfrac{w + w^*}{2}$, $b = \dfrac{w^* - w}{2}$, $c = \dfrac{r - r'}{2}$, $d = \dfrac{r + r'}{2}$이므로 a, b, c, d는 실수이다.

연습 문제 5.2:

(a) $\triangle A^2 = \langle \overline{A}^2 \rangle$이고 $\triangle B^2 = \langle \overline{B}^2 \rangle$임을 보여라.

(b) $[\overline{A}, \overline{B}] = [A, B]$임을 보여라.

(c) 이 관계들을 이용해 다음을 보여라.

$$\triangle A \triangle B \geq \frac{1}{2} |\langle \Psi | [A, B] | \Psi \rangle|.$$

해답:

(a) $\triangle A^2 = \sum_a (a - \langle A \rangle)^2 P(a) = \langle \Psi | (A - \langle A \rangle)^2 I | \Psi \rangle = \langle \overline{A^2} \rangle.$

B에 대해서도 마찬가지로 보일 수 있다.

(b) $[\overline{A}, \overline{B}] = [A - \langle A \rangle I, B - \langle B \rangle I]$

$$= (A - \langle A \rangle I)(B - \langle B \rangle I) - (B - \langle B \rangle I)(A - \langle A \rangle I)$$

$$= AB - \langle A \rangle B - \langle B \rangle A + \langle A \rangle \langle B \rangle I$$
$$- BA + \langle A \rangle B + \langle B \rangle A - \langle A \rangle \langle B \rangle I$$

$$= AB - BA = [A, B].$$

(c) 변수 x를 가지는 연산자 $Ax + iB$에 대해 다음이 성립한다.

$$0 \leq \| (Ax + iB) | \Psi \rangle \|^2 = \langle \Psi | (Ax - iB)(Ax + iB) | \Psi \rangle$$
$$= \langle \Psi | A^2 x^2 + i[A, B] x + B^2 | \Psi \rangle$$

$$0 \leq \langle \Psi | A^2 | \Psi \rangle x^2 + \langle \Psi | i[A, B] | \Psi \rangle x + \langle \Psi | B^2 | \Psi \rangle$$

$$0 \le \langle A^2 \rangle x^2 + \langle \Psi | i[A, B] | \Psi \rangle x + \langle B^2 \rangle.$$

이 2차 부등식이 항상 성립하기 때문에 2차 식의 판별식이 0보다 작거나 같다. 따라서

$$0 \ge |\langle \Psi | i[A, B] | \Psi \rangle|^2 - 4 \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle$$

이다. 앞의 식에 A 대신 $\overline{A}$, B 대신 $\overline{B}$를 대입하면 구할 수 있다.

식 5.12에서 $A \to \overline{A}$, $B \to \overline{B}$를 대입하면 다음과 같다.

$$2\sqrt{\langle \overline{A} \rangle^2 \langle \overline{B} \rangle^2} \ge \left| \langle \Psi | [\overline{A}, \overline{B}] | \Psi \rangle \right|.$$

(a)에서 $\langle \overline{A} \rangle^2 = \Delta A^2$, $\langle \overline{B} \rangle^2 = \Delta B^2$, (b)에서 $[\overline{A}, \overline{B}] = [A, B]$이므로 다음을 보일 수 있다.

$$2 \Delta A \Delta B \ge |\langle \Psi | [A, B] | \Psi \rangle|.$$