2019학년도 대학수학능력시험

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ③	03. ④	04. ②	05. ③
06. ①	07. ③	08. ①	09. ⑤	10. ④
11. ④	12. ②	13. ①	14. ④	15. ⑤
16. ②	17. ①	18. ②	19. ③	20. ⑤
21. ④	22. 15	23. 26	24. 4	25. 2
26. 12	27. 8	28. 11	29. 53	30. 27

1. **출제의도** : 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}+2\vec{b}=(1,\ -2)+2(-1,\ 4)$

$=(1,\ -2)+(-2,\ 8)$

$=(1-2,\ -2+8)$

$=(-1,\ 6)$

따라서 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$-1+6=5$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{\ln(1+3x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times\frac{x+5}{3}\right\}$$

$$=1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

정답 ③

3. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 y좌표는

$$\frac{2\times(-2)+1\times a}{2+1}=\frac{-4+a}{3}$$

이때 점 P가 x축 위에 있으므로

$$\frac{-4+a}{3}=0$$

따라서 $a=4$

정답 ④

4. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B^C이 서로 배반사건이므로

$A\cap B^C=\varnothing$

즉, $A\subset B$이므로 $B=A\cup(A^C\cap B)$

이때 A와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

정답 ②

5. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=2^{x-m}+2$ ……㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_2 8(x-2)$ ……㉡

㉡을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는

$x=\log_2 8(y-2)=3+\log_2(y-2)$

에서

$y=2^{x-3}+2$ ……㉢

㉠과 ㉢이 일치해야하므로

$m=3$

정답 ③

6. **출제의도** : 포물선의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=12x$의 준선의 방정식은

$x=-3$

이고, 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 준선까지의 거리와 같으므로 점 P와 준선 $x=-3$ 사이의 거리가 9이어야 한다.

따라서 점 P의 x좌표를 a라 하면

$a-(-3)=9$

이므로 $a=6$

정답 ①

7. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 음함수 꼴로 나타낸 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^x-xe^y=y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x-e^y-xe^y\times\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x-e^y}{xe^y+1}$

따라서 곡선 위의 점 $(0,1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{e^0-e^1}{0\times e^1+1}=1-e$$

정답 ③

8. **출제의도** : 이항분포에서의 평균과 분산을 이용하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{n}{2}$

이고, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{V}(X)=\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로 주어진 조건에 의하여

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=25$

즉, $\dfrac{n^2}{4}=25$

따라서 $n=10$

정답 ①

9. **출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$에서

$$f'(-1)=\frac{e}{(1+e)^2}$$

따라서

$$g'(f(-1))=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{(1+e)^2}{e}$$

정답 ⑤

정답 ④

10. **출제의도** : 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_2 = \frac{7\times 6}{2} = 21$$

이때 꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소인 경우는

$(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 7)$, $(3, 8)$, $(4, 5)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(5, 7)$, $(5, 8)$, $(6, 7)$, $(7, 8)$

의 14가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

정답 ④

11. **출제의도** : 삼각부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$$

$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$$

$\sin\theta + 2 > 0$이므로 $\sin\theta > \frac{1}{2}$에서

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$이므로

$$3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

12. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 초콜릿의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$$a+b+c+d=8$$

이때, 조건 (가)에 의하여 네 명의 학생이 각각 적어도 1개의 초콜릿을 받으므로 a, b, c, d는 자연수이다.

이때, $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면

$a'+b'+c'+d'=4$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

조건 (나)에 의하여 $a'>b'$이어야 하므로

(ⅰ) $b'=0$일 때,

$a'=1$인 경우 $c'+d'=3$이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_3={}_4C_3=4$

$a'=2$인 경우 $c'+d'=2$이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2=3$

$a'=3$인 경우 $c'+d'=1$이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_1={}_2C_1=2$

$a'=4$인 경우 $c'+d'=0$이므로 이 경우의 수는 1

(ⅱ) $b'=1$일 때,

$a'=2$인 경우 $c'+d'=1$이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_1={}_2C_1=2$

$a'=3$인 경우 $c'+d'=0$이므로 이 경우의 수는 1

따라서 구하는 모든 경우의 수는

$10+3=13$

정답 ②

13. **출제의도** : 좌표공간에서 조건을 만족시키는 평면의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건을 만족시키는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$라 하자.

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(1, -1, 2)$라 하면

$\vec{n}\perp\vec{u}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$이므로

$(a, b, c)\cdot(1, -1, 2)=0$

$a-b+2c=0$ ……㉠

또, 두 점 $(2, 0, 5)$, $(1, 2, -1)$이 평면 위에 있으므로

$\vec{n}\perp(1, -2, 6)$에서 $\vec{n}\cdot(1, -2, 6)=0$

$a-2b+6c=0$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$b-4c=0$에서 $b=4c$

$b=4c$를 ㉠에 대입하면

$a=b-2c=2c$

즉, $a:b:c=2c:4c:c=2:4:1$이므로

조건을 만족시키는 평면의 법선벡터를 $(2, 4, 1)$로 놓을 수 있다.

이때 평면의 방정식은

$2(x-2)+4y+(z-5)=0$

에서

$2x+4y+z-9=0$

이 식에 $y=0$, $z=0$을 대입하면

$x=\frac{9}{2}$이므로 조건을 만족시키는 평면이

x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{9}{2}$이다.

정답 ①

14. **출제의도** : 그래프를 이용하여 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

$f(x)g(x) \leq 3g(x)$

$\{f(x)-3\}g(x) \leq 0$

(i) $f(x)-3 \geq 0$, $g(x) \leq 0$인 경우

$x \leq 1$

(ii) $f(x)-3 \leq 0$, $g(x) \geq 0$인 경우

$3 \leq x \leq 5$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+3+4+5=13$

정답 ④

15. **출제의도** : 정규분포에서의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66{,}4, 15^2)$을 따른다.

이때,

$$\mathrm{P}(X \geq 73)=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \geq 0.44)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.44)$$
$$=0.5-0.17=0.33$$

따라서 구하는 확률은

$0.33\times0.4+0.67\times0.2=0.266$

정답 ⑤

16. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 x 대신 $\frac{1}{x}$를 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2f(x)=x+x^2$$

양변을 $2x^2$으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$\frac{3}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$$

따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln 2-1\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

정답 ②

17. **출제의도** : 조합의 수와 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 과정의 빈칸에 알맞은 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 집합 X의 6개의 원소 중에서 서로 다른 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$p={}_6\mathrm{C}_5=6$

(ⅱ)에서 $f(k)$의 값으로 선택할 수 있는 경우의 수는 집합 A의 원소의 개수와 같으므로

$q=5$

(ⅲ)에서 원소의 개수가 5인 집합 A에서 A로의 일대일 대응의 개수는 5!이므로

$r=5!=120$

따라서 $p+q+r=6+5+120=131$

정답 ①

18. **출제의도** : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내고 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{CAB}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sec\theta$, $\overline{\mathrm{BC}}=\tan\theta$

이때 직선 CD가 $\angle\mathrm{ACB}$를 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}$

즉, $\overline{\mathrm{AD}}=1\times\frac{\sec\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{1}{1+\sin\theta}$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\times\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{(1+\sin\theta)^2}$$

한편, $\overline{\mathrm{CE}}=\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}$이므로

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\tan\theta\times\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{(1+\sin\theta)^2}\right\}^2}{\frac{1}{2}\sin\theta\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{\theta}{\sin\theta+1-\cos\theta}\right\}$$

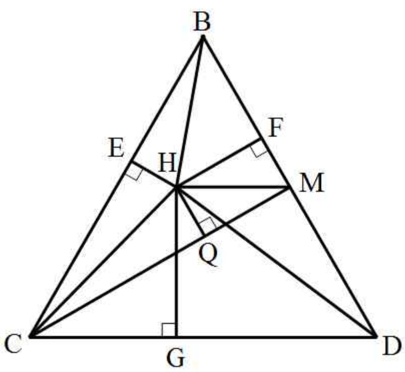
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\theta}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1+0}=\frac{1}{2}$$

정답 ②

19\. **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 H에서 세 선분 BC, BD, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하면 주어진 조건에 의하여

$\overline{HE}=k$, $\overline{HF}=2k$, $\overline{HG}=3k$

로 놓을 수 있다.

이때 정삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times(k+2k+3k)=36k$

이고, 한 변의 길이가 12인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2=36\sqrt{3}$이므로

$36k=36\sqrt{3}$에서 $k=\sqrt{3}$

한편 점 M은 선분 BD의 중점이므로 점 M과 선분 CD사이의 거리는 $3\sqrt{3}$이고, $\overline{HG}=3\sqrt{3}$이므로 $\overline{HM}//\overline{CD}$이다.

따라서

$\triangle CHM=\triangle DHM$

이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{HM}\times\overline{HG}=\frac{1}{2}\times\overline{DM}\times\overline{HF}$

$\overline{HM}\times3\sqrt{3}=6\times2\sqrt{3}$

$\overline{HM}=4$

한편 $\overline{AH}\perp$(평면BCD), $\overline{AQ}\perp\overline{CM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HQ}\perp\overline{CM}$

이때 사각형 HQMF는 직사각형이므로

$\overline{QM}=\overline{HF}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 HQM에서

$\overline{HQ}=\sqrt{\overline{HM}^2-\overline{QM}^2}=\sqrt{16-12}=2$

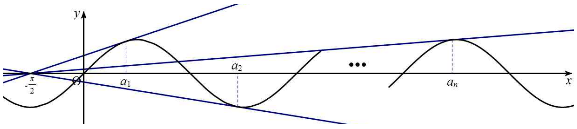
따라서 직각삼각형 AQH에서

$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

정답 ③

20\. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :



ㄱ. $(\sin x)' = \cos x$이므로

점 $(a_n, \sin a_n)$에서의 접선의 기울기는

$\cos a_n$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 두 점 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $(a_n, \sin a_n)$을 지나므로 기울기는

$\dfrac{\sin a_n - 0}{a_n + \dfrac{\pi}{2}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

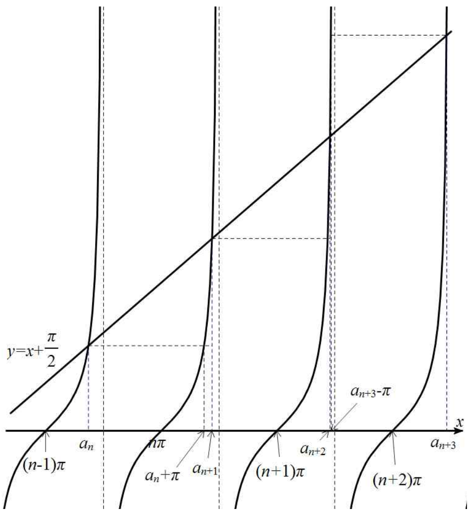
㉠, ㉡에서

$$\cos a_n = \frac{\sin a_n}{a_n + \dfrac{\pi}{2}}$$

이므로 $\dfrac{\sin a_n}{\cos a_n} = a_n + \dfrac{\pi}{2}$

따라서 $\tan a_n = a_n + \dfrac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 a_n은 곡선 $y = \tan x$와 직선 $y = x + \dfrac{\pi}{2}$의 교점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이다.



위 그림에서 $a_{n+1} > a_n + \pi$이므로

$a_{n+1} - a_n > \pi$임을 알 수 있다.

따라서

$$\tan a_{n+2} - \tan a_n = \left(a_{n+2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(a_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a_{n+2} - a_n$$

$$= (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

$$> \pi + \pi = 2\pi \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ의 그림에서

$a_{n+1} - (a_n + \pi) > (a_{n+3} - \pi) - a_{n+2}$

이므로

$a_{n+1} - a_n > a_{n+3} - a_{n+2}$

따라서

$a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 치환적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\int 2\{f(x)\}^2 f'(x)dx$$

$$= \int \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)dx$$

이므로

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 = \frac{1}{3}\{f(2x+1)\}^3 \times \frac{1}{2} + C$$

(단, C는 적분상수)

$\{f(2x+1)\}^3 = 4\{f(x)\}^3 + C'$ $(C' = -6C)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x = -1$을 대입하면

$\{f(-1)\}^3 = 4\{f(-1)\}^3 + C'$

에서 $C' = -3\{f(-1)\}^3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에 $x=-\frac{1}{8}$을 대입하면

$\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3=4\left\{f\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}^3+C'=4+C'$

㉠에 $x=\frac{3}{4}$을 대입하면

$\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3=4\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3+C'=16+5C'$

㉠에 $x=\frac{5}{2}$를 대입하면

$\{f(6)\}^3=4\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3+C'$

$2^3=64+21C'$

$C'=-\frac{8}{3}$ ……㉢

㉡, ㉢에서

$-3\{f(-1)\}^3=-\frac{8}{3}$

이므로

$\{f(-1)\}^3=\frac{8}{9}$

따라서 $f(-1)=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

정답 ④

22. **출제의도** : 순열의 수와 조합의 수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_6P_2-{}_6C_2$

$=6\times5-\frac{6\times5}{2}$

$=30-15$

$=15$

정답 15

23. **출제의도** : 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이므로

$\sec^2\theta=1+5^2=26$

정답 26

24. **출제의도** : 좌표평면 위의 운동에서의 가속도의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=4\sin4t$, $\frac{dy}{dt}=\cos4t$ 이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=16\sin^2 4t+\cos^2 4t$

$=15\sin^2 4t+1$

따라서 점 P의 속력은 $\sqrt{15\sin^2 4t+1}$이므로 속력이 최대가 되기 위해서는

$\sin^2 4t=1$ 즉, $\cos^2 4t=0$

또한,

$\frac{d^2x}{dt^2}=16\cos4t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin4t$ 이므로

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2$

$=256\cos^2 4t+16\sin^2 4t$

따라서 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{256\times0+16\times1}=4$

정답 4

25. **출제의도** : 부분적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\pi-x)=-\cos x$ 이므로

$$\int_0^\pi x\cos(\pi-x)dx=\int_0^\pi x(-\cos x)dx$$

이때,

$u(x)=x$, $v'(x)=-\cos x$

$u'(x)=1$, $v(x)=-\sin x$

라 하면

$$\int_0^\pi x\cos(\pi-x)dx$$

$$=\int_0^\pi x(-\cos x)dx$$

$$=[x(-\sin x)]_0^\pi+\int_0^\pi \sin x dx$$

$$=[-\cos x]_0^\pi$$

$$=-\cos\pi+\cos 0=2$$

정답 2

26. **출제의도** : 모평균을 추정할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{x}=75$일 때, 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$\overline{x}=77$일 때, 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

따라서,

$$b=75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$d=77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이므로

$$d-b=\left(77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right)$$

$$-\left(75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right)$$

$$=2+0.155\sigma=3.86$$

$0.155\sigma=1.86$

$\sigma=12$

정답 12

27. **출제의도** : 두 사건이 서로 독립이 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A=\{1,3,5\}$이므로 $P(A)=\frac{1}{2}$

(i) $m=1$일 때, $B=\{1\}$ 이므로

$A\cap B=\{1\}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ii) $m=2$일 때 $B=\{1,2\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A와 B는 서로 독립이다

(iii) $m=3$일 때 $B=\{1,3\}$

$A\cap B=\{1,3\}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(iv) $m=4$일 때 $B=\{1,2,4\}$

$A\cap B=\{1\}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(v) $m=5$일 때 $B=\{1,5\}$

$A\cap B=\{1,5\}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(vi) $m=6$일 때 $B=\{1,2,3,6\}$

$A\cap B=\{1,3\}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(i)~(vi)에 의하여 모든 m의 값의 합은

$2+6=8$

정답 8

28. **출제의도** : 타원의 정의를 이용하여 두 선분의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{33}=1$의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=2\times 7=14$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$ 가 최대가 되기 위해서는 $\overline{\mathrm{F'P}}$가 최소가 되어야 한다.

원 $x^2+(y-3)^2=4$의 중심을 $\mathrm{O'}(0,3)$이라 하면 $\mathrm{F'}(-4,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{F'P}}\geq\overline{\mathrm{F'O'}}-2$

$=\sqrt{4^2+3^2}-2$

$=3$

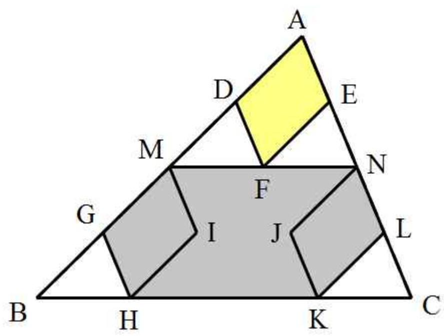
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}\leq 14-3=11$

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 11이다.

정답 11

29. **출제의도** : 벡터의 위치벡터를 이용하여 점이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 또, 두 선분 MB, NC의 중점을 각각 G, L이라 하자.

이때 $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$라 하면 점 S는 위 그림의 평행사변형 ADFE의 내부(경계선 포함)에 있다.

또, 점 Q가 점 B에 있으면

$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 MGHI의 내부(경계선 포함)에 있다.

마찬가지로 점 Q가 점 C에 있으면

$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 NJKL의 내부(경계선 포함)에 있다.

한편, $\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$라 하면 점 T는 선분 MN 위를 움직이므로 점 X가 나타내는 영역은 위 그림의 육각형 MGHKLN의

내부(경계선 포함)에 있다.

이때 삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{9}{4}$이고, 두 삼각형 GBH, LKC의 넓이는 각각 $\frac{9}{16}$이므로 구하는 넓이는

$9-\frac{9}{4}-2\times\frac{9}{16}=\frac{45}{8}$

따라서 $p=8$, $q=45$ 이므로

$p+q=53$

정답 53

[다른 풀이]

세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 M, K, N이라 하자.

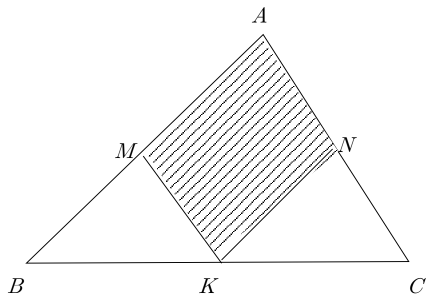
또한,

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdots$㉠

라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$는 선분 AM, AN 위의 두 점을 P′, R′이라 할 때,

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AP'}}+\overrightarrow{\mathrm{AR'}}$

이므로 ㉠이 나타내는 점 D는 그림과 같이 빗금친 평행사변형의 내부(경계선 포함)에 있다.



$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

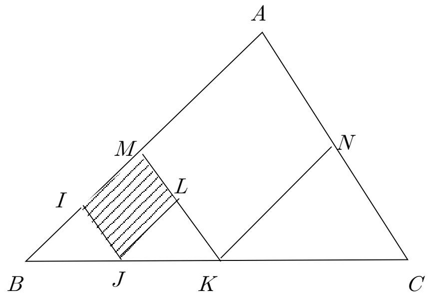
$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})\right\}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

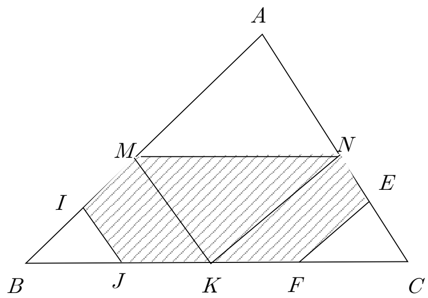
$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{2}$

따라서 점 X는 선분 DQ의 중점이다.

이때 점 Q가 B에 있을 경우 세 선분 BM, BK, MK의 중점을 각각 I, J, L이라 하면 점 X가 존재하는 영역은 그림과 같다.



따라서 점 Q가 변 BC 위를 움직이므로 두 변 CN, CL의 중점을 각각 E, F라 하면 위의 빗금친 영역 IJLM이 움직이는 영역이 점 X가 존재하는 영역으로 다음 그림과 같다.



이때, 삼각형 MKN의 넓이는

$9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

사각형 IJLM의 넓이는

$\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{27}{16}$

사각형 LFEN의 넓이도 $\frac{27}{16}$이므로 구하고자 하는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$\frac{9}{4}+2\times\frac{27}{16}=\frac{45}{8}$

즉, $p=8$, $q=45$ 이므로

$p+q=53$

30. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g'(x)=\dfrac{-\cos(f(x))\times f'(x)}{\{2+\sin(f(x))\}^2}$ 이므로

$g'(x)=0$ 에서

$\cos(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$

이때, $\cos(f(x))=0$ 에서

$f(x)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $f(x)=\pm\dfrac{3}{2}\pi$ 또는

$f(x)=\pm\dfrac{5}{2}\pi$ $\cdots$

그런데 조건 (가)에서

$\dfrac{1}{g(\alpha_1)}=\dfrac{1}{g(0)}=2+\sin(f(0))=\dfrac{5}{2}$ 이므로

$\sin(f(0))=\dfrac{1}{2}$

이때 $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$f(0)=\dfrac{\pi}{6}$ ……㉠

따라서 $\cos(f(\alpha_1))=\cos(f(0))\neq 0$ 이므로

$f'(0)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=6\pi x^3+px^2+\dfrac{\pi}{6}$ (p는 상수)

로 놓으면 조건 (나)에서

$\dfrac{1}{g(\alpha_5)}-\dfrac{1}{g(\alpha_2)}$

$=\sin(f(\alpha_5))-\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$ ……㉢

이때, $\cos(f(x))=0$이면

$\sin(f(x))=-1$ 또는 $\sin(f(x))=1$

이므로 ㉢을 만족시키기 위해서는

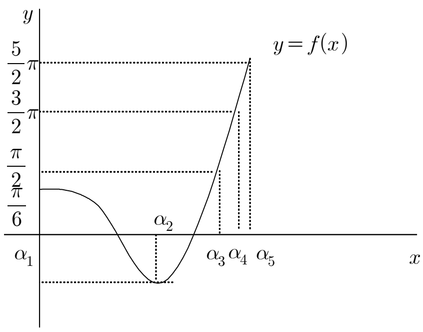
$f'(\alpha_2)=0$, $f'(\alpha_5)\neq 0$

또는

$f'(\alpha_2)\neq 0$, $f'(\alpha_5)=0$

(i) $f'(\alpha_2)=0$, $f'(\alpha_5)\neq 0$인 경우

$x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(\alpha_5)=\dfrac{5}{2}\pi$이므로

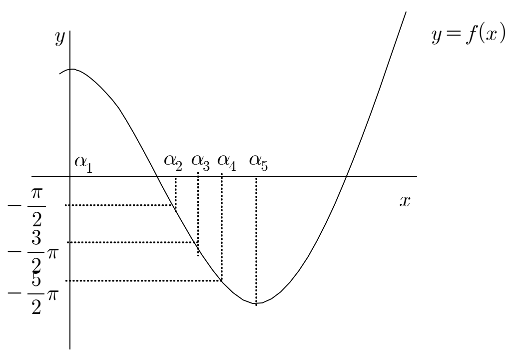
$\sin(f(\alpha_5))-\sin(f(\alpha_2))$

$=1-\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$

$\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$ …㉣

그런데, $-\dfrac{\pi}{2}<f(\alpha_2)<\dfrac{\pi}{6}$이므로 ㉣을 만족시키는 α_2는 존재하지 않는다.

(ii) $f'(\alpha_2)\neq 0$, $f'(\alpha_5)=0$인 경우 $x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때

$\sin(f(\alpha_2)) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

이므로 $\sin(f(\alpha_5)) = -\frac{1}{2}$ 이어야 한다.

따라서, $\cos(f(\alpha_5)) \neq 0$ 이므로

$f'(\alpha_5) = 0$

이고 위의 그림에서

$-\frac{7}{2}\pi < f(\alpha_5) < -\frac{5}{2}\pi$

이므로 $f(\alpha_5) = -3\pi + \frac{\pi}{6}$

즉, $f'(x) = 18\pi x^2 + 2px = 2x(9\pi x + p) = 0$

에서 $\alpha_5 = -\frac{p}{9\pi}$ 이므로

$$f(\alpha_5) = f\left(-\frac{p}{9\pi}\right)$$
$$= 6\pi \times \left(-\frac{p}{9\pi}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{9\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{6}$$
$$= -3\pi + \frac{\pi}{6}$$

$\frac{-2p^3}{3^5\pi^2} + \frac{p^3}{3^4\pi^2} = -3\pi$, $p^3 3^5 \pi^2 = -3\pi$

$p^3 = -3^6\pi^3$

따라서 $p = -3^2\pi = -9\pi$ 이므로

$f(x) = 6\pi x^3 - 9\pi x^2 + \frac{\pi}{6}$

$f'(x) = 18\pi x^2 - 18\pi x$

따라서

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\pi + 9\pi = \frac{27}{2}\pi$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}\pi - \frac{9}{4}\pi + \frac{\pi}{6} = -3\pi + \frac{\pi}{6}$

$\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left\{2 + \sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2}$$
$$= \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{27}{2}\pi}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{27\sqrt{3}}{4}\pi \times \frac{4}{9} = 3\sqrt{3}\pi$$

따라서

$a^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$

정답 27