

2019학년도 11월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나형]

1	4	2	3	3	2	4	1	5	5
6	3	7	5	8	4	9	5	10	2
11	2	12	1	13	4	14	1	15	5
16	4	17	3	18	1	19	3	20	2
21	1	22	2	23	21	24	6	25	10
26	16	27	8	28	13	29	192	30	48

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$$

2. [출제의도] 등차수열 계산하기

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열
이므로 일반항은
 $a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$
따라서 $a_3 = 9$

3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$$

4. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f(x) = x^2 + 7x + 6$ 에서 $f'(x) = 2x + 7$
따라서 $f'(2) = 11$

5. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq 3x \leq \pi \text{에서 } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin 3x = 1 \text{에서 } 3x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 } x = \frac{\pi}{6}$$

6. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2f(x) = 2 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + g(x) - 2f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow 2} 2f(x) \\ &= 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$f(3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$$

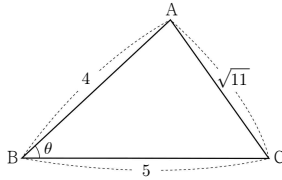
8. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_{n+1} + a_n = n + 3$ 에서 $a_{n+1} = n + 3 - a_n$
 $n = 1$ 일 때, $a_1 = 1$ 이므로 $a_2 = 1 + 3 - a_1 = 3$
 $n = 2$ 일 때, $a_3 = 2 + 3 - a_2 = 2$
 $n = 3$ 일 때, $a_4 = 3 + 3 - a_3 = 4$

9. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x) = (x-2)(x^3 - 4x + a)$ 에서
 $f'(x) = (x^3 - 4x + a) + (x-2)(3x^2 - 4)$
 $f'(1) = (a-3) + 1 = 6$
따라서 $a = 8$

10. [출제의도] 코사인법칙 이해하기



$$\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{11})^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

11. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, 1)$, $(b, 4)$ 라 하자.

$$\frac{2^a}{3} = 1, \frac{2^b}{3} = 4 \text{이므로 } 2^a = 3, 2^b = 12$$

$$2^{b-a} = \frac{2^b}{2^a} = \frac{12}{3} = 4 \text{에서 } b-a = 2$$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{4-1}{b-a} = \frac{3}{2}$$

[다른 풀이]

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, 1)$, $(b, 4)$ 라 하자.

$$y = \frac{2^x}{3} \text{에서 } 3y = 2^x, x = \log_2 3y \text{이므로}$$

$$a = \log_2 (3 \times 1) = \log_2 3$$

$$b = \log_2 (3 \times 4) = \log_2 12$$

$$b-a = \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 4 = 2$$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{4-1}{b-a} = \frac{3}{2}$$

12. [출제의도] 다항함수의 미분 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 + a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이고}$$

$$f'(x) = 4x + a \text{이므로}$$

$$f'(1) = 4 + a = 5 \text{에서 } a = 1$$

$$2 + a + b = 0 \text{에서 } b = -3$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + x - 3$ 이므로

$$f(2) = 7$$

13. [출제의도] 미분가능성 이해하기

$f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하므로 $x = 1$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1 - a + b \text{이므로}$$

$$2 + b = 1 - a + b \text{에서 } a = -1$$

$f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 3 - 2a + b = 5 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2$$

$$5 + b = 2 \text{에서 } b = -3$$

따라서 $a \times b = 3$

14. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

$a, b, 6$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 6 \dots \text{㉠}$$

$a, 6, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$6^2 = ab \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$(2b-6)b = 36$$

$$b^2 - 3b - 18 = (b-6)(b+3) = 0$$

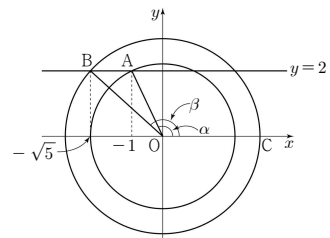
$$b = 6 \text{ 또는 } b = -3$$

㉠에서 $b = 6$ 일 때 $a = 6$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

$$b = -3 \text{일 때 } a = -12$$

$$\text{따라서 } a + b = -12 - 3 = -15$$

15. [출제의도] 삼각함수의 뜻 이해하기



직선 $y = 2$ 가 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 제2사분면에서
만나는 점 A의 좌표는 $(-1, 2)$ 이고

$$|OA| = \sqrt{5} \text{이므로 } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

직선 $y = 2$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 제2사분면에서
만나는 점 B의 좌표는 $(-\sqrt{5}, 2)$ 이고

$$|OB| = 3 \text{이므로 } \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{따라서 } \sin \alpha \times \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

16. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$A(t, \sqrt{t})$, $B(t+4, \sqrt{t+4})$, $C(t+4, \sqrt{t})$ 이므로

$$|AC| = 4, |BC| = \sqrt{t+4} - \sqrt{t}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{t+4} - \sqrt{t}) = 2(\sqrt{t+4} - \sqrt{t})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times S(t)}{2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \times (\sqrt{t+4} - \sqrt{t})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times (\sqrt{t+4} - \sqrt{t})(\sqrt{t+4} + \sqrt{t})}{\sqrt{t+4} + \sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{t+4} + \sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{t}} + 1}$$

$$= \frac{4}{1+1} = 2$$

17. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 a_6 = ar \times ar^5 = a^2 r^6 = 1 \dots \text{㉠}$$

$$S_3 = 3a_3 \text{이고 } r < 0 \text{이므로 } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 3ar^2$$

$$r^2 + r + 1 = 3r^2, (2r+1)(r-1) = 0 \text{에서 } r = -\frac{1}{2}$$

$a > 0$ 이고 ㉠에서 $a^2 = 64$ 이므로 $a = 8$

따라서 $a_7 = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$

18. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 추론하기

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	q	$2^{a+3}-16$	r	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	s	S_3
	S_4	S_5	S_6	

그림과 같이 빈 칸에 들어갈 수를 각각 p, q, r, s 라 하자.

$S_1 = S_4$ 이므로 $q = p$

$S_3 = S_6$ 이므로 $r = 2^{a+3} - 16$

$S_3 = S_4$ 이므로 $s = 4^a - 2^{a+3} + 16 + p$

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	p	$2^{a+3}-16$	$2^{a+3}-16$	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	$4^a - 2^{a+3} + 16 + p$	S_3
	S_4	S_5	S_6	

$S_1 = S_3 = S_6 = 4^a - 2^{a+1} + p$

$S_2 = S_5 = 2^{a+4} - 32 + p$ 이므로

$4^a - 2^{a+1} + p = 2^{a+4} - 32 + p$

$(2^a)^2 - 18 \times 2^a + 32 = 0$

$(2^a - 2)(2^a - 16) = 0$

$2^a = 2$ 또는 $2^a = 16$

$a = 1$ 또는 $a = 4$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 5

19. [출제의도] 수열을 이용하여 추론하기

세 자연수 a, b, d 는 $2b = a + d$ 를 만족시키므로 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차가 될 수 있는 가장 작은 값은 2, 가장 큰 값은 $\boxed{10}$ 이다.

이 등차수열의 공차를 $k (2 \leq k \leq \boxed{10})$ 이라 하면

$1 \leq a < a+k < c < a+2k \leq 21$ 이므로

c 가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $k-1$ 이고

a 가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는

$\boxed{21-2k}$ 이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$\sum_{k=2}^{10} \{(k-1) \times \boxed{21-2k}\}$

$= \sum_{k=2}^{10} (-2k^2 + 23k - 21)$

$= \sum_{k=1}^{10} (-2k^2 + 23k - 21) - (-2 \times 1^2 + 23 \times 1 - 21)$

$= -2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 23 \times \frac{10 \times 11}{2} - 21 \times 10$

$= \boxed{285}$

따라서 $p = 10, f(k) = 21 - 2k, q = 285$ 이므로

$p + q + f(3) = 10 + 285 + 15 = 310$

20. [출제의도] 로그함수를 이용하여 추론하기

$|\log_2 x - n| = 1$ 에서

$\log_2 x - n = 1$ 또는 $\log_2 x - n = -1$

$x = 2^{n+1}$ 또는 $x = 2^{n-1}$

$|\log_2 x - n| = 2$ 에서

$\log_2 x - n = 2$ 또는 $\log_2 x - n = -2$

$x = 2^{n+2}$ 또는 $x = 2^{n-2}$

$\therefore \overline{A_1 B_1} = 2^2 - 2^0 = 3$ (참)

$\therefore \overline{A_n B_n} = 2^{n+1} - 2^{n-1} = 2^n(2 - 2^{-1}) = \frac{3}{2} \times 2^n$

$\overline{C_n D_n} = 2^{n+2} - 2^{n-2} = 2^n(2^2 - 2^{-2}) = \frac{15}{4} \times 2^n$

따라서 $\overline{A_n B_n} : \overline{C_n D_n} = \frac{3}{2} : \frac{15}{4} = 2 : 5$ (참)

$\therefore S_n = \frac{1}{2}(\overline{A_n B_n} + \overline{C_n D_n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} \times 2^n + \frac{15}{4} \times 2^n\right)$
 $= \frac{7}{4} \overline{A_n B_n} = \frac{21}{8} \times 2^n$

따라서 $S_n = 21 \times 2^{n-3}$

$21 \leq 21 \times 2^{k-3} \leq 210$

$1 \leq 2^{k-3} \leq 10$ 을 만족하는 자연수 k 의 값은 3, 4, 5, 6

모든 자연수 k 의 값의 합은 18 (거짓)

따라서 옳은 것은 \therefore, \perp

21. [출제의도] 로그를 이용하여 추론하기

$\log_a b = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)라 하면

서로 다른 유리수 $\frac{q}{p}$ 의 개수는

서로 다른 순서쌍 (p, q) 의 개수와 같다.

$\log_a b = \frac{q}{p}$ 이므로 $b = a^{\frac{q}{p}}, a^q = b^p$

a, b, p, q 가 모두 자연수이므로, 어떤 자연수 c 에 대하여 $a = c^p, b = c^q$ 이다.

$4 < a < b < 200$ 이므로 $4 < c^p < c^q < 200$ 이다.

(i) $c = 2$ 일 때

$4 < 2^p < 2^q < 200$ 이고 이를 만족시키는

p, q 의 순서쌍을 구하면 (p, q) 는

$(3, 4), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 6),$

$(5, 7), (6, 7)$ 이므로 8개

(ii) $c = 3$ 일 때

$4 < 3^p < 3^q < 200$ 이고 이를 만족시키는

p, q 의 순서쌍을 구하면 (p, q) 는

$(2, 3), (3, 4)$ 이므로 2개

(iii) $c = 4$ 일 때

$4 < 4^p < 4^q < 200$ 이고 이를 만족시키는

p, q 의 순서쌍을 구하면 (p, q) 는 $(2, 3)$ 이므로 1개

(iv) $c = 5$ 일 때

$4 < 5^p < 5^q < 200$ 이고 이를 만족시키는

p, q 의 순서쌍을 구하면 (p, q) 는

$(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ 이므로 3개

(v) $6 \leq c \leq 14$ 일 때

$4 < c^p < c^q < 200$ 이고 이를 만족시키는

p, q 의 순서쌍을 구하면 (p, q) 는

$(1, 2)$ 뿐이므로 모두 (iv)의 경우에 포함된다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서

$(2, 3)$ 이 세 번, $(3, 4)$ 가 두 번 중복되었으므로

서로 다른 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$(8 + 2 + 1 + 3) - 2 - 1 = 11$

따라서 $n(A) = 11$

[다른 풀이]

$\log_a b = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)라 하면

$b = a^{\frac{q}{p}}$ 이고 $n(A)$ 는 서로 다른 $\frac{q}{p}$ 의 개수와 같다.

(i) $p = 1$ 일 때

a 는 $4 < a < 200$ 을 만족하는 자연수이고

4보다 큰 자연수 중 가장 작은 수는 5이므로

$4 < a < a^q < 200$ 을 만족하는 모든 자연수 q 는

$4 < 5 < 5^q < 200$ 을 만족한다.

따라서 $\frac{q}{p}$ 는 2, 3이다.

(ii) $p \geq 2$ 일 때

$a^{\frac{q}{p}}$ 이 자연수이므로 $a^{\frac{1}{p}}$ 은 자연수이다.

따라서 a 가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 2^p

(단, $p = 2$ 일 때 $4 < a$ 에서 3^2)

따라서 $4 < a < 200$ 이고 $a^{\frac{1}{p}}$ 이 자연수인 모든

자연수 a 에 대하여 $4 < a < a^{\frac{q}{p}} < 200$ 을 만족하는

모든 자연수 q 는 $4 < 2^p < (2^p)^{\frac{q}{p}} < 200$ 을 만족한다.

따라서 서로 다른 유리수 $\frac{q}{p}$ 의 개수는

$4 < 2^p < 2^q < 200$ 을 만족시키는 $\frac{q}{p}$ 의 개수와 같다.

i) $p = 2$ 일 때

$4 < 3^2 < 3^q < 200$ 을 만족하는 p 와 서로소인 자연수 q 는 3이다.

따라서 $\frac{q}{p}$ 는 $\frac{3}{2}$ 이다.

ii) $p = 3$ 일 때

$4 < 2^3 < 2^q < 200$ 을 만족하는 p 와 서로소인 자연수 q 는 4, 5, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$ 는 $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}$ 이다.

iii) $p = 4$ 일 때

$4 < 2^4 < 2^q < 200$ 을 만족하는 p 와 서로소인 자연수 q 는 5, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$ 는 $\frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ 이다.

iv) $p = 5$ 일 때

$4 < 2^5 < 2^q < 200$ 을 만족하는 p 와 서로소인 자연수 q 는 6, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$ 는 $\frac{6}{5}, \frac{7}{5}$ 이다.

v) $p = 6$ 일 때

$4 < 2^6 < 2^q < 200$ 을 만족하는 p 와 서로소인 자연수 q 는 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$ 는 $\frac{7}{6}$ 이다.

$4 < 2^7 < 200 < 2^8$ 이므로 $p \geq 7$ 일 때 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\frac{q}{p}$ 의 개수는 11이다.

따라서 $n(A) = 11$

22. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 3^2 = 2$

23. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{3h} = \frac{1}{3} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$
 $= \frac{1}{3} f'(4) = 7$

따라서 $f'(4) = 3 \times 7 = 21$

24. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질 이해하기

함수 $y = 3^x + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y = 2$
 함수 $y = \log_3(x-4)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 4$
 따라서 두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $(4, 2)$ 이므로 $a+b$ 의 값은 6

25. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC에서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로
 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$
 $\overline{AB} = 15$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 50이므로
 $50 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin\theta$
 $= \frac{1}{2} \times 15 \times \overline{BC} \times \frac{2}{3}$
 $= 5 \times \overline{BC}$
 따라서 $\overline{BC} = 10$

26. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면 $f'(x) = 2x + a$
 모든 실수 x 에 대하여 $2f(x) = (x+1)f'(x)$ 이므로
 $2(x^2 + ax + b) = (x+1)(2x+a)$
 등식 $2x^2 + 2ax + 2b = 2x^2 + (a+2)x + a$ 는 항등식이므로
 $2a = a+2, 2b = a$ 에서 $a = 2, b = 1$
 따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 이므로 $f(3) = 16$

27. [출제의도] 삼각함수 이해하기

함수 $f(x) = 3\sin\frac{\pi(x+a)}{2} + b$ 에서
 최댓값은 $3+b=5$ 이고
 최솟값은 $-3+b=-1$ 이므로 $b=2$
 함수 $f(x) = 3\sin\frac{\pi}{2}(x+a) + 2$ 의 그래프는
 함수 $y = 3\sin\frac{\pi}{2}x + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족하는 최소의 양수 p 가 4이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 4이다.
 함수 $f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = 3\sin\frac{\pi}{2}x + 2$ 의 그래프와 일치하고 함수 $f(x)$ 의 주기는 4이므로 $a = 4k$ (k 는 정수)이다.
 a 가 양수일 때 a 의 최솟값은 4이므로 $a \times b$ 의 최솟값은 8

28. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

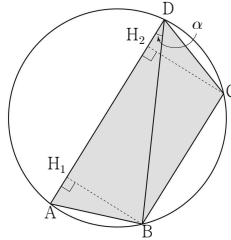
조건 (가)에서 $|a_5| + |a_6| = |a_5 + a_6| + 2$ 이고
 공차가 음수이므로 $a_5 > 0, a_6 < 0$ 이다.
 이 수열의 공차를 d 라 하면
 $(a_1 + 4d) - (a_1 + 5d) = |2a_1 + 9d| + 2$
 $|2a_1 + 9d| = -d - 2$ 이므로
 $2a_1 + 9d = d + 2, a_1 + 4d = 1 \dots \textcircled{1}$
 또는 $2a_1 + 9d = -d - 2, a_1 + 5d = -1 \dots \textcircled{2}$
 조건 (나)에서
 $\sum_{n=1}^6 |a_n| = \sum_{n=1}^5 a_n - a_6$

$$= \frac{5(2a_1 + 4d)}{2} - a_1 - 5d = 37 \text{에서}$$

$4a_1 + 5d = 37 \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에서 $a_1 = 13$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $a_1 = \frac{38}{3}$ 은 자연수가 아니다.
 따라서 $a_1 = 13$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABD에서 $\angle ADB = \alpha$ 라 할 때,
 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로
 $\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} = 12$
 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로
 $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$
 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이므로 $\angle ADB = \angle CBD$
 선분 AD와 선분 BC는 평행하므로
 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 할 때,
 $\overline{DH_1} = \overline{BD} \cos\alpha = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = 2\sqrt{26}$
 $\overline{BH_1} = \overline{BD} \sin\alpha = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{6}$
 $\overline{AH_1} = \overline{DH_2}$ 이므로 사각형 ABCD의 넓이
 $S = \frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{BH_1}$
 $= \frac{1}{2} \times \{(\overline{DH_1} + \overline{AH_1}) + (\overline{DH_1} - \overline{DH_2})\} \times \overline{BH_1}$
 $= \overline{DH_1} \times \overline{BH_1}$
 $= 2\sqrt{26} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{39}$
 따라서 $\frac{S^2}{13} = 192$

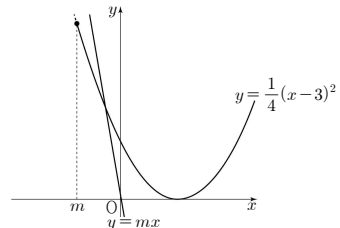
30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

정의역이 $\{x \mid x \geq m\}$ 인 함수 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 그래프가 직선 $y = mx$ 와 만나는 점의 개수를 $h_1(m)$ 이라 하고
 정의역이 $\{x \mid x < m\}$ 인 함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 직선 $y = mx$ 와 만나는 점의 개수를 $h_2(m)$ 이라 하면 $g(m) = h_1(m) + h_2(m)$ 이다.
 함수 $g(m)$ 이 $m = 0$ 에서 연속이므로
 $g(0) = \lim_{m \rightarrow 0^+} g(m) = \lim_{m \rightarrow 0^-} g(m)$ 이고
 함수 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 그래프는 $x = 3$ 에서 x 축에 접하므로
 $\lim_{m \rightarrow 0^+} h_1(m) = 2, \lim_{m \rightarrow 0^-} h_1(m) = 0, h_1(0) = 1$
 $\lim_{m \rightarrow 0^+} g(m) = \lim_{m \rightarrow 0^+} \{h_1(m) + h_2(m)\}$

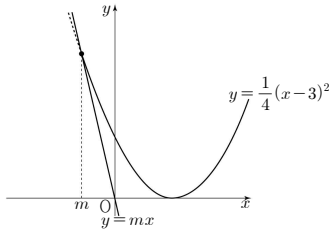
$= 2 + \lim_{m \rightarrow 0^+} h_2(m)$
 $\lim_{m \rightarrow 0^-} g(m) = \lim_{m \rightarrow 0^-} \{h_1(m) + h_2(m)\}$
 $= 0 + \lim_{m \rightarrow 0^-} h_2(m)$
 $g(0) = h_1(0) + h_2(0) = 1 + h_2(0)$
 따라서 $2 + \lim_{m \rightarrow 0^+} h_2(m) = 0 + \lim_{m \rightarrow 0^-} h_2(m) = 1 + h_2(0)$
 이때, $h_2(m) = 0$ 또는 $h_2(m) = 1$ 또는 $h_2(m) = 2$ 이므로
 $h_2(0) = 0$ 일 때
 $2 + \lim_{m \rightarrow 0^+} h_2(m) = 1 + h_2(0) = 1, \lim_{m \rightarrow 0^-} h_2(m) = -1$
 이므로 성립하지 않는다.
 $h_2(0) = 2$ 일 때
 $0 + \lim_{m \rightarrow 0^-} h_2(m) = 1 + h_2(0) = 3,$
 $\lim_{m \rightarrow 0^-} h_2(m) = 3$ 이므로 성립하지 않는다.
 따라서 $h_2(0) = 1$
 $\lim_{m \rightarrow 0^-} h_2(m) = 2, \lim_{m \rightarrow 0^+} h_2(m) = 0$ 이므로
 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프는 $x < 0$ 에서 x 축에 접한다.
 따라서 $a > 0, b = \frac{a^2}{4}, g(0) = 2$

(i) 직선 $y = mx$ 와 곡선 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 위치관계를 확인하면
 $mx = \frac{1}{4}(x-3)^2$
 $x^2 - (4m+6)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (4m+6)^2 - 4 \times 9 = 16m(m+3)$
 함수 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 는 $-3 < m < 0$ 에서 만나지 않고
 $m = 0, m = -3$ 에서 한 점에서 만나고
 $m < -3$ 또는 $m > 0$ 에서 두 점에서 만난다.
 $x = m$ 일 때 직선 $y = mx$ 와
 곡선 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 y 좌표의 대소관계를 확인하면
 $\frac{1}{4}(m-3)^2 - m^2 = -\frac{3}{4}(m+3)(m-1)$ 이므로
 $m < 0$ 에서
 $-3 < m < 0$ 일 때 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 y 좌표가 더 크고
 $m < -3$ 일 때 $y = mx$ 의 y 좌표가 더 크다.
 직선 $y = mx$ 와 함수 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

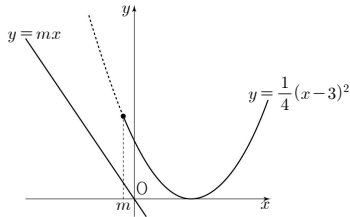
i) $m < -3$ 일 때
 $x \geq m$ 에서 교점의 개수 $h_1(m) = 1$



ii) $m = -3$ 일 때
 $x \geq m$ 에서 교점의 개수 $h_1(m) = 1$



iii) $-3 < m < 0$ 일 때
 $x \geq m$ 에서 교점의 개수 $h_1(m) = 0$



$g(m)$ 은 $m \leq 0$ 에서 연속이고 $g(0) = 2$ 이므로
 $m < -3$ 일 때 $h_2(m) = 1$
 $m = -3$ 일 때 $h_2(m) = 1$
 $-3 < m < 0$ 일 때 $h_2(m) = 2$

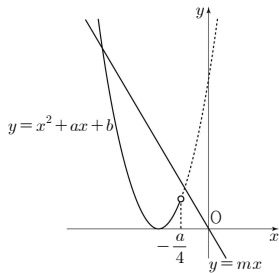
(ii) 직선 $y = mx$ 와 곡선 $y = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ 의

위치관계를 확인하면
 $x = m$ 일 때

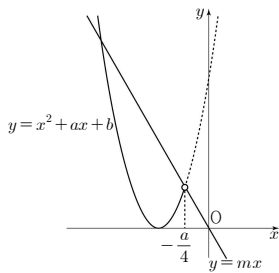
$$m^2 + am + \frac{a^2}{4} - m \times m = a \left(m + \frac{a}{4} \right) \text{이므로}$$

$m = -\frac{a}{4}$ 일 때 함수 $y = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ 의 그래프와
 직선 $y = mx$ 는 $x = m$ 에서 만난다.

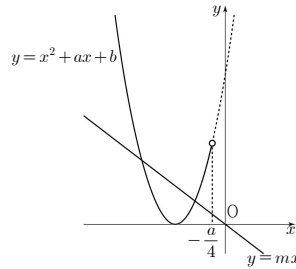
i) $m < -\frac{a}{4}$ 일 때
 $x < m$ 에서 교점의 개수 $h_2(m) = 1$



ii) $m = -\frac{a}{4}$ 일 때
 $x < m$ 에서 교점의 개수 $h_2(m) = 1$



iii) $-\frac{a}{4} < m < 0$ 일 때
 $x < m$ 에서 교점의 개수 $h_2(m) = 2$



(i), (ii)에서

$h_2(m)$	1	1	2
(i)	$m < -3$	$m = -3$	$-3 < m < 0$
(ii)	$m < -\frac{a}{4}$	$m = -\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4} < m < 0$

$m \leq 0$ 에서 함수 $g(m)$ 이 연속이 되려면

$$-\frac{a}{4} = -3, a = 12$$

$$b = \frac{a^2}{4} \text{이므로 } b = 36$$

따라서 $a + b = 48$