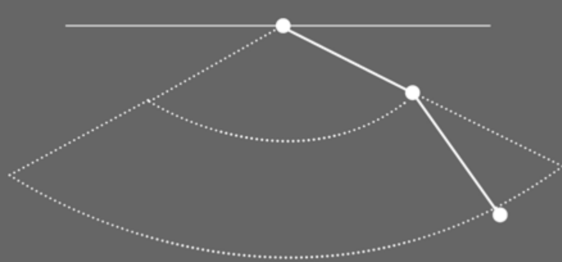
7강

# 대칭성과 보존 법칙



레니는 지도를 읽느라 애먹었다.

자신이 보는 방향마다 언제나 북쪽인 것처럼 보였다.

레니는 왜 위아래보다 동서남북에 더 애를 먹는지 궁금했다.

위아래라면 거의 언제나 틀리지 않았을 텐데 말이다.

**연습 문제 1:** 식 (2)를 유도하고 부호의 차이를 설명하라.

식 (2): $\dot{p}_1 = -V'(q_1 - q_2)$, $\dot{p}_2 = +V'(q_1 - q_2)$. $(V' = \frac{\partial V}{\partial q}.)$

**해답:** 일반화된 좌표 $q_1, q_2$에 대해 퍼텐셜 에너지가 $V(q_1 - q_2)$일 때 일반화된 운동량 $p_1, p_2$의 시간에 대한 변화율은 식 (2)와 같이 주어진다.

일반화된 운동량은 $p = m\dot{q}$이므로 $\dot{p} = m\ddot{q}$은 계에 작용하는 힘과 같다. 따라서 퍼텐셜 에너지 원리에 의해 $\dot{p} = m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$이다.

$q_1 - q_2 = u$라고 하면, $\frac{\partial u}{\partial q_1} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial q_2} = -1$이므로

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u} \times 1 = -V'(u)$$

$$= -V'(q_1 - q_2)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_2} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q_2} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u} \times (-1) = +V'(u)$$

$$= +V'(q_1 - q_2).$$

부호의 차이는 $q_1$, $q_2$에 작용하는 두 힘 $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$의 방향이 서로 반대 방향이라는 것을 나타낸다. 이것은 뉴턴의 운동 제3법칙인 작용－반작용 법칙과 의미가 같다.

**연습 문제 2:** 다음의 보존을 설명하라.

퍼텐셜 에너지가 $V(q_1, q_2) = V(aq_1 - bq_2)$일 때 $bp_1 + ap_2$가 보존된다.

**해답:** 계의 라그랑지안이

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2) + V(aq_1 - bq_2)$$

일 때 다음과 같은 좌표 변환을 통해 순환 좌표를 얻을 수 있다.

$$q_+ = aq_1 + bq_2, \ q_- = aq_1 - bq_2.$$

$q_+ + q_- = 2aq_1, \ q_+ - q_- = 2aq_2$이므로 $aq_1 - bq_2 = q_-$이고 퍼텐셜 에너지는 $V(aq_1 - bq_2) = V(q_-)$이다. 따라서 $q_+$는 순환 좌표이고, 켤레 운동량 $p_+$는 보존된다. 한편

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2a}(\dot{q}_+ + \dot{q}_-), \ \dot{q}_2 = \frac{1}{2b}(\dot{q}_+ - \dot{q}_-)$$

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_+} = \frac{1}{2a}, \ \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_+} = \frac{1}{2b}$$

이므로

$$p_+ = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_+} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_+} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_+} = \frac{p_1}{2a} + \frac{p_2}{2b}$$

$$2abp_+ = bp_1 + ap_2$$

$$\frac{d}{dt}(2abp_+) = \frac{d}{dt}(bp_1 + ap_2) = 0$$

의 관계가 성립한다. 즉 $bp_1 + ap_2$의 보존은 순환 좌표 $q_+ = aq_1 + bq_2$의 켤레 운동량 $p_+$의 보존을 의미한다.

**연습 문제 3:** 식 (7)에 대해 $aq_1+bq_2$의 조합은 라그랑지안과 함께 불변임을 보여라.

식 (7): $q_1 \to q_1 - b\delta$, $q_2 \to q_2 + a\delta$

**해답:**

$$aq_1+bq_2 \to a(q_1-b\delta)+b(q_2+a\delta)=aq_1-ab\delta+bq_2+ab\delta=aq_1+bq_2.$$

즉 식 (7)과 같은 좌표 변환에 대해 $aq_1+bq_2$은 불변이다.

**연습 문제 4:** 다음이 사실임을 보여라.

$\delta x = y\delta,\ \delta y = -x\delta$일 때 라그랑지안은 $\delta$의 1차 변위에 대해 변하지 않는다.

**해답:** 주어진 좌표 변환

$$x \to x + y\delta$$
$$y \to y - x\delta$$

에 대해 라그랑지안은 다음과 같이 변화한다.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x^2 + y^2)$$

$$\to L = \frac{1}{2}m\{(\dot{x} + \dot{y}\delta)^2 + (\dot{y} - \dot{x}\delta)^2\} - V((x + y\delta)^2 + (y - x\delta)^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta + \dot{y}^2\delta^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\delta + \dot{x}^2\delta^2)$$

$$- V(x^2 + 2xy\delta + y^2\delta^2 + y^2 - 2xy\delta + x^2\delta^2).$$

$\delta$의 1차 변위에 대해서만 고려하면 2차 항은 0로 근사시킬 수 있다. $(\delta^2 = 0.)$ 남은 1차 항 $\pm 2\dot{x}\dot{y}\delta,\ \pm 2xy\delta$가 모두 소거되므로

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x^2 + y^2)$$

이다. 즉 라그랑지안은 주어진 좌표 변환에 대해 불변이다.

**연습 문제 5:** 초기 각도 $\theta_0$로부터 $xy$ 평면에서 호를 그리며 흔들거리는 길이 $l$의 단순 진자에 대한 운동 방정식을 정하라.

**해답:** 진자의 위치와 속도를 극 좌표로 표현하면 다음과 같다.

$$(x,y)=(l\sin\theta,-l\cos\theta)$$

$$(\dot{x},\dot{y})=(\dot{\theta}\,l\cos\theta,\dot{\theta}\,l\sin\theta).$$

$$\dot{l}=0.$$

따라서

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2l^2\cos^2\theta+\dot{\theta}^2l^2\sin^2\theta\right)=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V=mgy=-mgl\cos\theta$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

이다. 라그랑지안이 $\theta$에 대한 1변수 함수이므로 1개의 오일러–라그랑주 방정식이 존재한다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta})-mgl(-\sin\theta)=0$$

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0.$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

$\theta$가 충분히 작을 경우 다음과 같은 근사법에 따라 진자의 운동 방정식을 구할 수 있다.

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\ =\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

$$\ddot{\theta}=-\omega^2\theta,\ \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

$$\theta(t)=\theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,\theta\right).$$

따라서 충분히 작은 각도로 진동하는 진자는 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 의 주기를 갖는 단순 조화 운동을 한다.

**연습 문제 6:** $\theta$와 $\alpha$에 대해 이중 진자의 오일러-라그랑주 방정식을 계산하라.

**해답:** 본문의 조건과 마찬가지로 중력장이 없고, 질량이 $M=1$, 길이가 $r=1$인 이중 진자를 가정하면, 계의 라그랑지안은 좌표 $(\theta, \phi=\theta+\alpha)$에 대해 다음과 같이 주어진다.

$$L(\theta,\phi)=\dot{\theta}^2+\frac{\dot{\phi}^2}{2}+\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi).$$

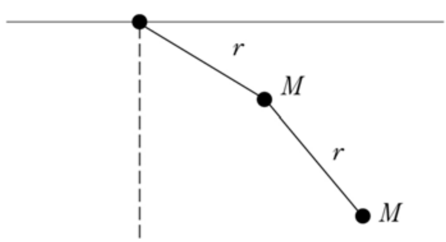



**그림 7.1** 이중 진자.

우선 $\theta$에 대한 오일러-라그랑주 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{d}{dt}\left[2\dot{\theta}+\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right]$$

$$=2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi)-(\dot{\theta}-\dot{\phi})\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)$$

$$2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi)-\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi)=0.$$

마찬가지로 $\phi$에 대한 오일러-라그랑주 방정식 또한 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\frac{d}{dt}\left[\dot{\phi}+\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right]$$

$$=\ddot{\phi}+\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi)-\dot{\theta}(\dot{\theta}-\dot{\phi})\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}=\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)$$

$$\ddot{\phi}+\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi)-\dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi)=0.$$

따라서 다음의 두 방정식을 얻을 수 있다.

$$2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi)-\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi)=0$$
$$\ddot{\phi}+\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi)-\dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi)=0.$$

$\alpha=\phi-\theta$의 관계를 통해 $\theta$와 $\alpha$에 관해 표현할 수도 있다.

$$2\ddot{\theta}+\ddot{\alpha}\cos\alpha+\dot{(\theta+\alpha)}^2\sin\alpha=0$$
$$\ddot{\alpha}+\ddot{\theta}\cos\alpha+\dot{\theta}^2\sin\alpha=0.$$

두 방정식을 연립하면 $\theta(t)$, $\alpha(t)$ 각각의 운동 방정식을 구할 수 있는데, 그 과정이 복잡해 여기서는 다루지 않는다.

**연습 문제 7:** 이중 진자의 각운동량 형태를 계산하고. 중력장이 없을 때 보존된다는 것을 보여라.

**해답:** 연습 문제 6의 라그랑지안에 대해 $\theta$와 $\phi$ 방향의 각운동량 $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, $p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$을 계산하면 다음과 같다.

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos(\theta - \phi),$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} + \dot{\theta}\cos(\theta - \phi).$$

그리고 각운동량 보존은 오일러-라그랑주 방정식을 이용해 간접적으로 보일 수 있다.

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi).$$

따라서 계의 전체 각운동량의 시간 도함수는

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_i = \frac{dp_\theta}{dt} + \frac{dp_\phi}{dt} = -\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) + \dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) = 0$$

이므로, 계의 전체 각운동량이 보존된다는 것을 알 수 있다.