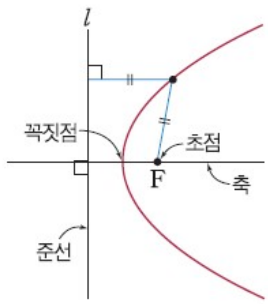
01 포물선의 방정식

포물선

평면 위에서 한 정직선 l과 그 위에 있지 않은 정점 F에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라고 한다. 이때, 정직선 l을 포물선의 준선, 정점 F를 포물선의 초점이라고 한다. 또한 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축이라하고, 포물선과 그 축과의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.



포물선의 방정식

1) 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

2) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

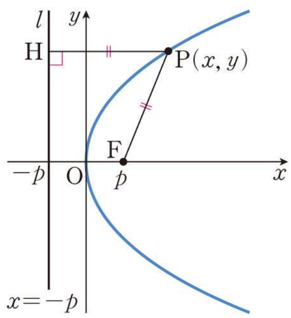
▷ 포물선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$가 된다. 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$$

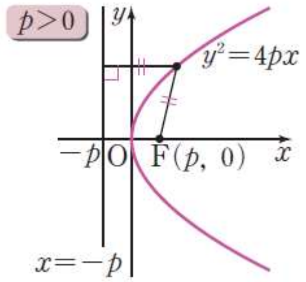
이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

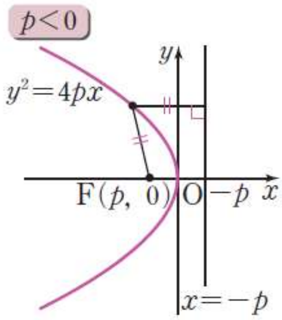
$$y^2 = 4px$$

을 얻을 수 있다.

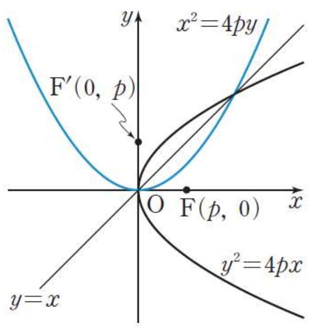


▷ $y^2 = 4px$에서 $p > 0$, $p < 0$인 경우의 포물선의 그래프는 다음과 같다.

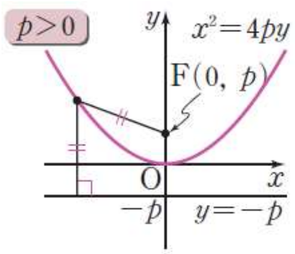


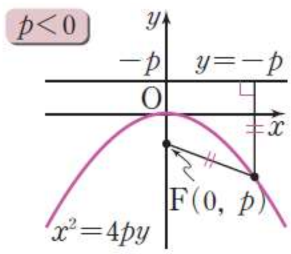


▷ 일반적으로 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ $(p \neq 0)$이고 준선이 $x = -p$인 포물선 $y^2 = 4px$를 직선 $y = x$ 대하여 대칭이동하면 초점이 $\mathrm{F}'(0,\ p)$ $(p \neq 0)$이고 준선이 $y = -p$인 포물선 $x^2 = 4py$가 된다.



▷ $x^2 = 4py$에서 $p > 0$, $p < 0$인 경우의 포물선의 그래프는 다음과 같다.





다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

(1) $y^2 = 2x$　　　　(2) $x^2 = -3y$

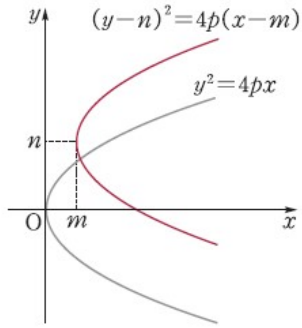
(1) $y^2 = 2x = 4 \times \frac{1}{2} \times x$　　$\therefore$ 초점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 준선 $x = -\frac{1}{2}$

(2) $x^2 = 3y = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times y$　　$\therefore$ 초점 $\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)$, 준선 $y = \frac{3}{4}$

포물선의 평행이동

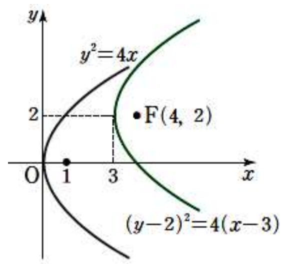
꼭짓점이 원점에 있는 포물선 $y^2=4px$, $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 각각 $(y-n)^2=4p(x-m)$, $(x-m)^2=4p(y-n)$가 되고 초점과 준선 역시 다음과 같이 이동하게 된다.

	$(y-n)^2=4p(x-m)$	$(x-m)^2=4p(y-n)$
초점	$(p+m,\ n)$	$(m,\ p+n)$
준선	$x=m-p$	$y=n-p$
꼭짓점	$(m,\ n)$	$(m,\ n)$
축	$y=n$	$x=m$



방정식 $y^2-4x-4y+16=0$에 대하여 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

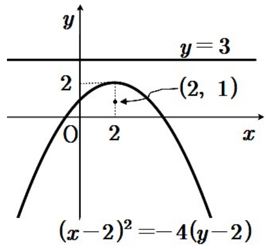
주어진 방정식을 정리하면 $(y-2)^2=4(x-3)$인데, 이것은 포물선 $y^2=4x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$에서 $(4,\ 2)$로, 준선의 방정식은 $x=-1$에서 $x=2$로 이동하게 되고, 그 그래프는 오른쪽과 같다.



초점이 $F(2,\ 1)$이고 준선이 $y=3$인 포물선의 방정식을 구하시오.

초점에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 꼭짓점은 초점과 점 H의 중점이 되어 $(2, 2)$가 되고, 준선이 $y=3$이므로 $x^2=4py$가 x축, y축으로 모두 2만큼 평행이동했다고 볼 수 있다. 또한 초점에서 준선까지의 거리가 2이고 준선이 초점보다 위쪽에 있으므로 $p=-1$이 되어 구하는 포물선의 방정식은 다음과 같다.

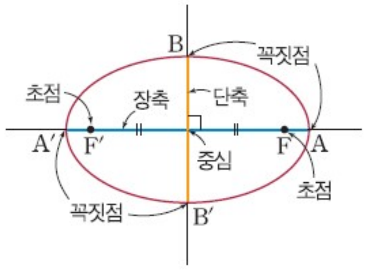
$$(x-2)^2=-4(y-2)$$



02 타원의 방정식

타원

평면 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 두 정점 F, F′을 타원의 초점이라고 한다.
오른쪽 그림과 같이 타원의 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, $\overline{\mathrm{FF'}}$의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′라고 할 때, 이 네 점을 타원의 꼭짓점이라 하고, $\overline{\mathrm{AA'}}$을 장축, $\overline{\mathrm{BB'}}$을 단축, 장축과 단축의 교점을 타원의 중심이라고 한다.



타원의 방정식

1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (\text{단, } b^2=a^2-c^2)$$

2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$으로부터의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식은

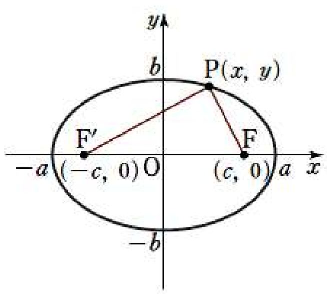
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (\text{단, } a^2=b^2-c^2)$$

▷ 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 할 때, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$ 이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

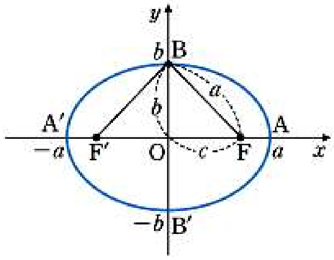
$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$



다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$이고, $a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2$ $(b>0)$으로 놓으면 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$이 된다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

▷ 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에서 생각해보면



$a^2-c^2=b^2$이므로 $c=\sqrt{a^2-b^2}$

따라서 초점의 좌표는

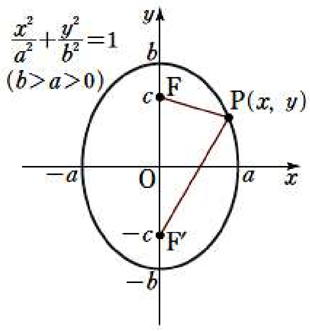
$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\quad \mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$$

이고, 꼭짓점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이다. 또, 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.

▷ 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식을 같은 방법으로 구하면

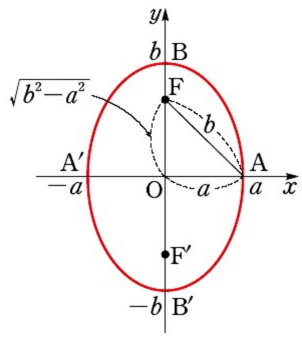


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (단,\ a^2=b^2-c^2)$$

▷ 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$에서 생각해보면

$b^2-c^2=a^2$이므로 $c=\sqrt{b^2-a^2}$이다.

따라서 초점의 좌표는



$$\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right),\ \mathrm{F}'\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$$

꼭짓점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이다. 또 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.

두 점 $\mathrm{F}(\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3},\ 0)$으로부터의 거리의 합이 4인 타원의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라고 하자. 일정한 거리의 합이 4이므로

$2a=4 \quad \therefore \quad a=2$

두 초점의 좌표가 $(\pm\sqrt{3},\ 0)$이므로

$(\sqrt{3})^2=a^2-b^2=2^2-b^2$에서 $b^2=1$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$이다.

또한 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{A}'(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}'(0,\ -1)$이다.

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 각각 구하시오.

타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $a^2=9$, $b^2=16$이며 $b>a>0$인 경우이므로

초점의 좌표 : $\left(0,\ \pm\sqrt{16-9}\right)$ 즉, $(0,\ \pm\sqrt{7})$이 된다.

장축의 길이 : $2b=2\times4=8$

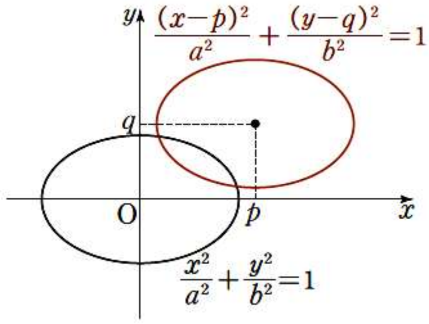
단축의 길이 : $2a=2\times3=6$

타원의 평행이동

중심이 원점에 있는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 중심이 $(p,\ q)$인 타원

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

이 된다.

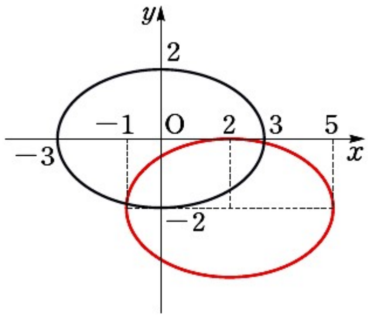


	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$
초점	$\begin{cases}(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0) & (a^2>b^2)\\(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}) & (a^2<b^2)\end{cases}$	$\begin{cases}(\pm\sqrt{a^2-b^2}+p,\ q) & (a^2>b^2)\\(p,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}+q) & (a^2<b^2)\end{cases}$
중심	$(0,\ 0)$	$(p,\ q)$
꼭짓점	$(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$	$(\pm a+p,\ q)$, $(p,\ \pm b+q)$

방정식 $4x^2+9y^2-16x+36y+16=0$가 나타내는 타원에 대하여 초점과 꼭짓점의 좌표를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

주어진 방정식을 정리하면 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

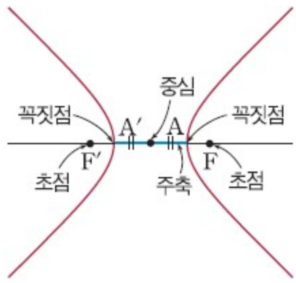
이것은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 타원이다. 따라서 초점이 좌표는 $(\pm\sqrt{5}+2,\ -2)$, 꼭짓점의 좌표는$(-1,\ -2)$, $(5,\ -2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ -4)$이고 그래프는 오른쪽과 같다.



03 쌍곡선의 방정식

쌍곡선

평면 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 정점 F, F′을 그 쌍곡선의 초점이라고 한다. 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선의 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점 A, A′를 쌍곡선의 꼭짓점이라 하고, $\overline{\mathrm{AA'}}$을 쌍곡선의 주축, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라고 한다.



쌍곡선의 방정식

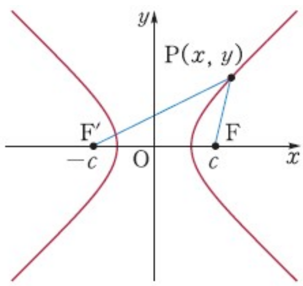
1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$로부터 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

▷ 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 할 때, 쌍곡선의 정의에 의 하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$ 이므로



$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

그런데 $c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$ $(b>0)$으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

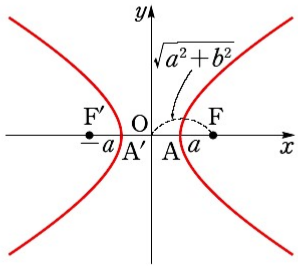
이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=c^2-a^2)$$

▷ 그림과 같이 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$$

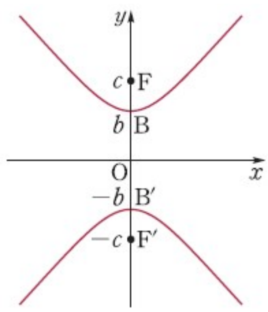
또 쌍곡선의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{A}'(-a,\ 0)$이고, 주축의 길이는 $2a$이다.



▷ 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 같은 방법으로 구하면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2)$$

이때, 초점의 좌표는 $\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\right)$, $\mathrm{F}'\left(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$이고, 꼭짓점의 좌표는 각각 $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$이다. 또, 주축의 길이는 $2b$이고 중심은 원점이다.



두 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 8인 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하자.

일정한 거리의 차가 8이므로 $2a=8$에서 $a=4$

두 초점의 좌표가 $(\pm 5,\ 0)$이므로 $(5)^2=a^2+b^2$에서 $b^2=9$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$의 초점의 좌표, 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 각각 구하시오.

쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$에서 $a^2=16,\ b^2=25$인 경우 이므로

초점의 좌표 : $\left(0,\ \pm\sqrt{16+25}\right)$ 즉, $\left(0,\ \pm\sqrt{41}\right)$

꼭짓점의 좌표 : $(0,\ 5),\ (0,\ -5)$

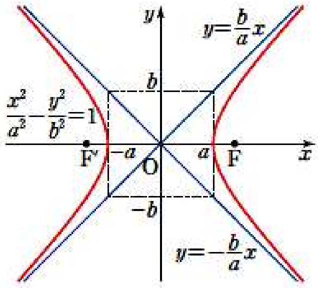
주축의 길이 : $2b=2\times5=10$

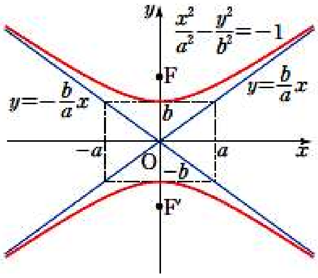
쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 과 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 의 점근선의 방정식은

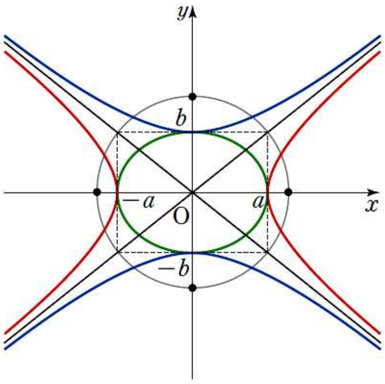
$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

▷ 쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 y에 대하여 풀면 $y=\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ 이다. 이때 $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\dfrac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 쌍곡선은 두 직선 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다. 같은 방법으로 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식도 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$ 임을 알 수 있다.





▷ 쌍곡선의 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 또는 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 그래프를 쉽게 그리기 위해서는 먼저, 네 점 $(a,0), (-a,0), (0,b), (0,-b)$를 지나고 각 변이 x축 또는 y축과 평행한 직사각형을 그린다. 이 직사각형의 각 변을 연장하면 쌍곡선의 꼭짓점을 지나면서 x축 또는 y축에 평행한 접선이 되고, 이 직사각형의 대각선의 연장선은 쌍곡선의 점근선 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$가 되어 쌍곡선을 쉽게 그릴 수 있다. 또, 오른쪽 그림에서와 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 이 직사각형에 내접하게 된다.

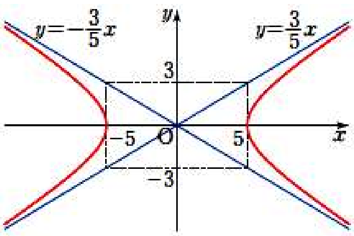


쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식을 구하고, 쌍곡선의 그래프를 그리시오.

주어진 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$이므로

점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{3}{5}x$가 되고, 꼭짓점의

좌표가 $(\pm 5,\ 0)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



쌍곡선의 평행이동

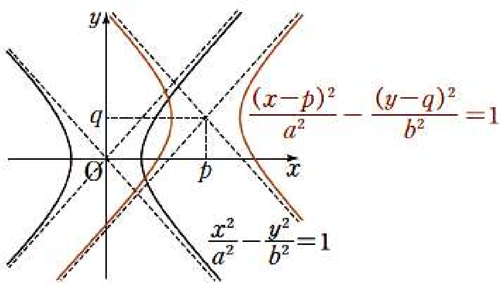
중심이 원점에 있는 쌍곡선

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$를 x축의 방향으로 p만큼,

y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

중심이 $(p,\ q)$인 쌍곡선

$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$이 된다.



	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$
초점	$(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$	$(\pm\sqrt{a^2+b^2}+p,\ q)$
중심	$(0,\ 0)$	$(p,\ q)$
꼭짓점	$(\pm a,\ 0)$	$(\pm a+p,\ q)$
점근선	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{b}{a}(x-p)+q$

	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=-1$
초점	$(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$	$(p,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}+q)$
중심	$(0,\ 0)$	$(p,\ q)$
꼭짓점	$(0,\ \pm b)$	$(p,\ \pm b+q)$
점근선	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{b}{a}(x-p)+q$

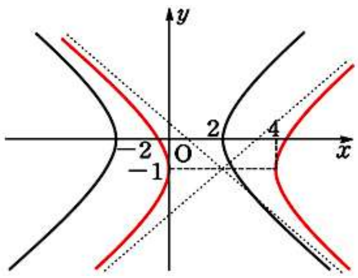
방정식 $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$가 나타내는 쌍곡선에 대하여 초점, 중심, 꼭짓점의 좌표와 점근선의 방정식을 구하고 그 그래프를 그리시오.

주어진 방정식을 변형하면

$3(x^2-4x+4)-4(y^2+2y+1)=12$

$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 쌍곡선이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 또한 초점, 중심, 꼭짓점의 좌표는 아래와 같다.



초점 : $(\pm\sqrt{7}+2,\ -1)$

중심 : $(2,\ -1)$

꼭짓점 : $(0,\ -1),\ (4,\ -1)$

점근선 : $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)-1$

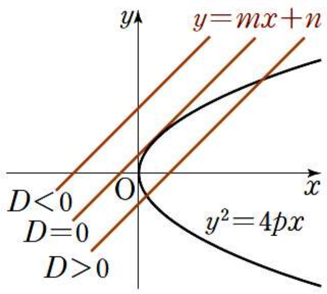
포물선과 직선의 위치 관계

포물선 $y^2 = 4px$ $(p \neq 0)$와 직선 $y = mx + n$ $(m \neq 0)$에서 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한

$$m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0$$

의 판별식을 D로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

1) $D > 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
2) $D = 0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)
3) $D < 0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



▷ 포물선과 직선의 방정식을 각각

$$y^2 = 4px \quad (p \neq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$
$$y = mx + n \quad (m \neq 0) \qquad \cdots\cdots ②$$

이라 하면, 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족하는 실수인 해 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$이다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

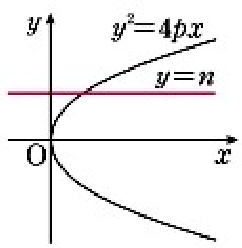
$$(mx + n)^2 = 4px$$
$$m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

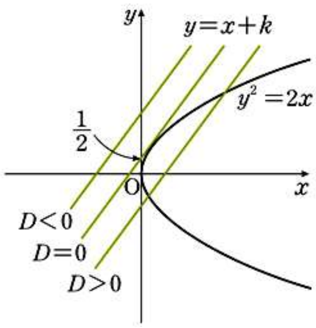
$$\begin{aligned} D &= 4(mn - 2p)^2 - 4m^2n^2 \\ &= 4(m^2n^2 - 4mnp + 4p^2) - 4m^2n^2 \\ &= 16p(p - mn) \end{aligned}$$

이때 판별식 D의 부호에 따라 이 이차방정식의 실근의 개수, 즉 주어진 포물선과 직선의 교점의 x좌표의 개수가 결정된다.

▷ $y = mx + n$에서 $m = 0$이면 포물선과의 교점은 1개가 된다.



포물선 $y^2 = 2x$와 직선 $y = x + k$의 위치 관계를 k의 값에 따라 조사하시오.



$y^2 = 2x$에 $y = x + k$를 대입하면 $(x+k)^2 = 2x$

이것을 정리하면 $x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = -2k + 1$$

이므로 주어진 포물선과 직선은

① $D > 0$, 즉 $k < \frac{1}{2}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D = 0$, 즉 $k = \frac{1}{2}$일 때, 한 점에서 만난다(접한다).

③ $D < 0$, 즉 $k > \frac{1}{2}$일 때, 만나지 않는다.

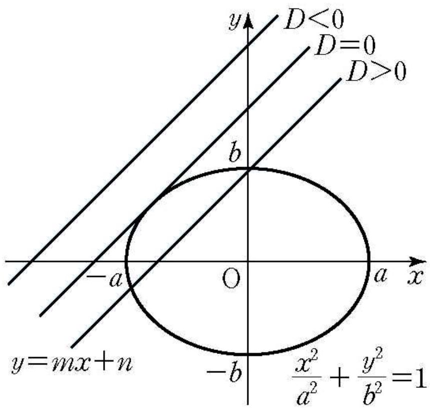
타원과 직선의 위치 관계

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

의 판별식 D로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

1) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
2) $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)
3) $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



▷ 타원과 직선의 방정식을 각각

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ②$$

이라 하면, 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족하는 실수인 해 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$이다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned} D &= 4a^4m^2n^2-4(a^2m^2+b^2)(a^2n^2-a^2b^2) \\ &= 4a^2b^2(a^2m^2-n^2+b^2) \end{aligned}$$

이때 판별식 D의 부호에 따라 이 이차방정식의 실근의 개수, 즉 주어진 타원과 직선의 교점의 x좌표의 개수가 결정된다.

타원 $9x^2+16y^2=144$와 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 실수 k의 값의 범위에 따라 조사하시오.

$y=x+k$를 $9x^2+16y^2=144$에 대입하여 정리하면 $25x^2+32kx+16(k^2-9)=0$가 되고 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(16k)^2-25\times16(k^2-9)=-144(k+5)(k-5)$$

① $D>0$, 즉 $-5<k<5$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$, 즉 $k=\pm5$일 때, 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $D<0$, 즉 $k<-5$ 또는 $k>5$일 때, 만나지 않는다.

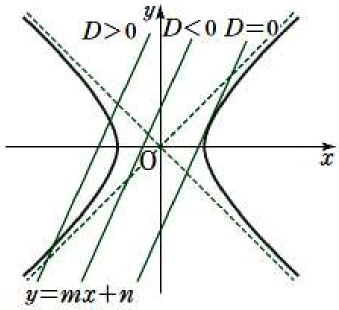
쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0$$
$$\left(단,\ m\neq\pm\frac{b}{a}\right)$$

의 판별식 D로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

1) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
2) $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)
3) $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



▷ 쌍곡선과 직선의 방정식을 각각

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ① \qquad y=mx+n \quad \cdots\cdots ②$$

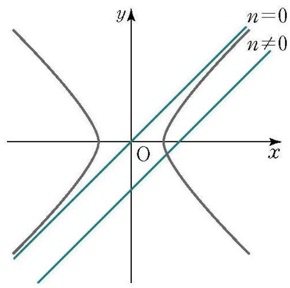
이라 하면, 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족하는 실수인 해 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$이다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

[1] $a^2m^2-b^2=0$일 때

i) $n=0$이면 직선 ②는 쌍곡선 ①의 점근선 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ 중 하나이므로 만나지 않는다.

ii) $n\neq 0$이면 직선 ②는 쌍곡선 ①의 점근선에 평행한 직선이므로 쌍곡선 ①과 항상 한 점에서 만난다.



[2] $a^2m^2-b^2\neq 0$일 때

이차방정식 ③의 판별식을 D라 하면 $D=4a^2b^2(-a^2m^2+n^2+b^2)$
이때 판별식 D의 부호에 따라 이 이차방정식의 실근의 개수, 즉 주어진 타원과 직선의 교점의 x좌표의 개수가 결정된다.

쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 실수 k의 값의 범위에 따라 조사하시오.

$y=x+k$를 $4x^2-9y^2=36$에 대입하여 정리한 이차방정식 $5x^2+18kx+9(k^2+4)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(9k)^2-5\times 9(k^2+4)=36(k-\sqrt{5})(k+\sqrt{5})$$

① $k<-\sqrt{5}$, $k>\sqrt{5}$이면, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $k=\pm\sqrt{5}$일 때, 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$일 때, 만나지 않는다.

02 이차곡선의 접선

포물선의 접선

포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

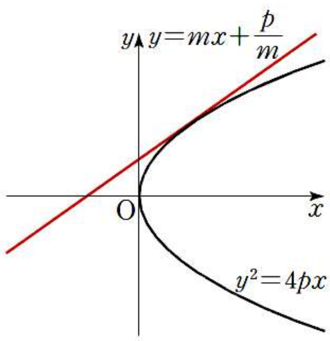
▷ 포물선 $y^2 = 4px$에 접하고 기울기가 m $(m \neq 0)$인 접선의 방정식을 $y = mx + n$이라고 하면 두 식 $y^2 = 4px$와 $y = mx + n$에서 y를 소거하여 만든 x에 대한 이차방정식

$$m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

이 중근을 가져야 한다. 식 ①의 판별식을 D라고 하면

$$D = 16p(p - mn) = 0 \qquad \therefore\ n = \frac{p}{m}$$

따라서 접선의 방정식은 $y = mx + \dfrac{p}{m}$ 이다.



▷ 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

i) $x_1 \neq 0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \cdots\cdots ②$$

또, 포물선 $y^2 = 4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

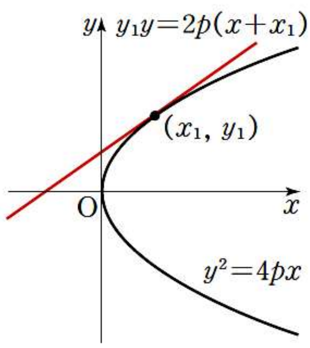
$$y = mx + \frac{p}{m} \quad \cdots\cdots ③$$

이므로 ②, ③에서 $x_1m^2 - y_1m + p = 0$, $y_1 = 4px_1$이므로

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{(-y_1)^2 - 4px_1}}{2x_1} = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{2p}{y_1}$$

이것을 ①에 대입하여 정리하면 $y_1 y = 2p(x + x_1)$이다.

ii) $x_1 = 0$일 때, $y_1 = 0$이므로 접선의 방정식은 $x = 0$이고, 이 경우에도 $y_1 y = 2p(x + x_1)$이 성립한다.



다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2 = 12x$에 접하고 기울기가 2인 직선

(2) 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $(3,\ 6)$에서 포물선에 접하는 직선

(1) $y^2 = 4 \cdot 3x$이므로 $y = 2x + \frac{3}{2}$

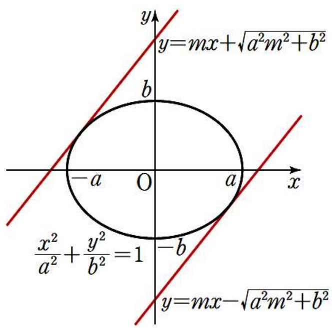
(2) $6y = 2 \cdot 3(x+3)$ 따라서 $y = x + 3$

타원의 접선

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

▷ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을



$y=mx+n$이라고 하면 두 식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 와 $y=mx+n$에서 y를 소거하여 만든 x에 대한 이차방정식

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

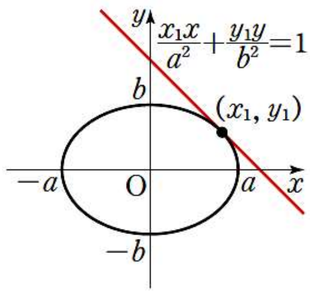
이 중근을 가져야 한다. 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$$

$$\therefore\ n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

따라서 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다.

▷ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식



i) $y_1\neq 0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad\cdots\cdots ①$$

또, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}\quad\cdots\cdots ②$$

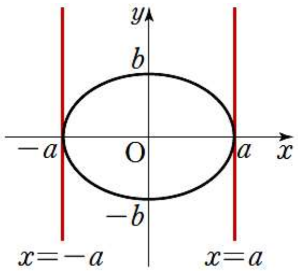
이므로 ①과 ②에서 $-mx_1+y_1=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m+\frac{b}{a}x_1\right)^2=0\qquad\therefore\ m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이것을 ①에 대입하여 정리하면 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$이다.

ii) $y_1 = 0$일 때, $x_1 = \pm a$이므로 접선의 방정식은 $x = \pm a$이고,

이 경우에도 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$이 성립한다.



다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$에 접하고 기울기가 1인 직선

(2) 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서 타원에 접하는 직선

(1) $y = x \pm \sqrt{1 \times 8 + 2} = x \pm \sqrt{10}$

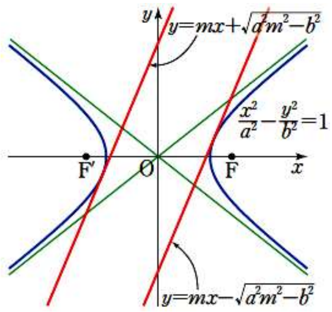
(2) $\frac{-2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore 2x - 4y + 8 = 0$

쌍곡선의 접선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=\pm 1$$

▷ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면 두 식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 와 $y=mx+n$에서 y를 소거하여 만든 x에 대한 이차방정식



$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0$$

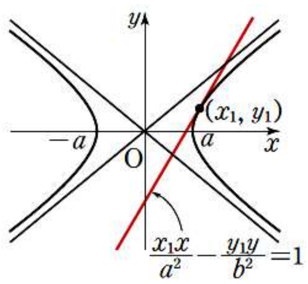
이 중근을 가져야 한다. 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4a^2b^2(b^2-a^2m^2+n^2)=0$$
$$\therefore\ n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\quad (a^2m^2-b^2>0)$$

따라서 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이다.

▷ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

ⅰ) $y_1\neq 0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은



$$y-y_1=m(x-x_1)\quad \cdots\cdots ①$$

또 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\quad \cdots\cdots ②$$

그런데 ①과 ②는 같은 직선이므로 다음이 성립한다.

$$y_1-mx_1=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$({x_1}^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(b^2+{y_1}^2)=0\quad \cdots\cdots ③$$

또 $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$에서 $x_1^2-a^2=\dfrac{a^2y_1^2}{b^2}$, $b^2+y_1^2=\dfrac{b^2x_1^2}{a^2}$

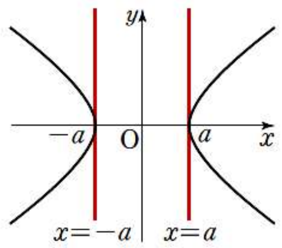
이것을 ③에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2-2x_1y_1m+\frac{b^2x_1^2}{a^2}=0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{ay_1}{b}m-\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$$

따라서 m의 값을 구하면 $m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고 이것을 ①에 대입하고 $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$을

이용하여 정리하면 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

ii) $y_1=0$일 때, 접점이 $(a,\ 0)$ 또는 $(-a,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $x=a$ 또는 $x=-a$이다. 이 경우에도 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$과 같이 나타낼 수 있다.



▷ 마찬가지 방법으로 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구해보면 $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$ (단, $b^2-a^2m^2>0$)이다. 또한 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$임을 알 수 있다.

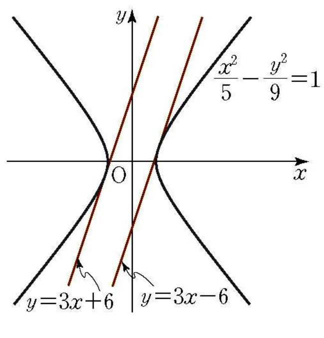
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하시오.

$m=3,\ a^2=5,\ b^2=9$이므로

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$에 대입하면

$y=3x\pm\sqrt{5\times9-9}$,

$y=3x\pm6$



쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

$x_1=3,\ y_1=-2,\ a^2=3,\ b^2=2$이므로 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$에 대입하면

$\frac{3x}{3}-\frac{-2y}{2}=1$, 즉 $y=-x+1$