01 수열의 수렴과 발산

수열의 수렴

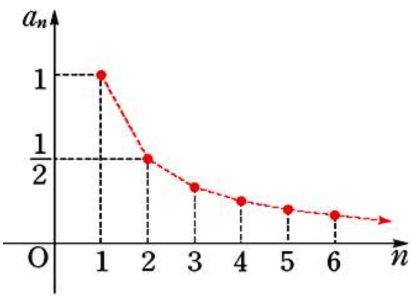
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하고, 이것을 기호로

$$n \to \infty \text{ 일 때 } a_n \to \alpha \quad \text{또는} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

와 같이 나타낸다.

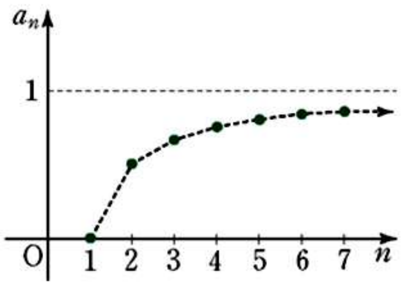
▷ 수열 $\{a_n\}$이 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 과 같으면 일반항은 $a_n = \frac{1}{n}$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$



▷ 수열 $\{a_n\}$이 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$ 과 같으면 일반항은 $a_n = \frac{n-1}{n}$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $\frac{n-1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$



▷ 수열 $\{a_n\}$이 $c, c, c, \cdots, c, \cdots$ (c는 상수) 와 같으면 일반항은 $a_n = c$이고, n이 한없이 커지더라도 $a_n = c$이므로 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c$$

수열의 발산

1) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

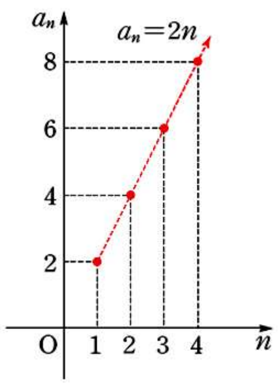
2) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

3) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

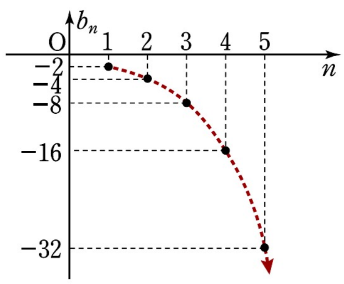
▷ 수열 $\{a_n\}$이 $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$ 과 같으면 일반항은 $a_n = 2n$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $2n$의 값도 한없이 커지므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

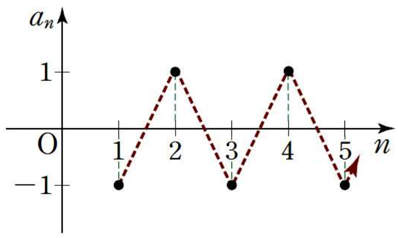


▷ 수열 $\{a_n\}$이 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ \cdots$ 과 같으면 일반항은 $a_n = -2^n$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, -2^n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty$$



▷ 수열 $\{a_n\}$이 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ 과 같으면 일반항은 $a_n=(-1)^n$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 n이 한없이 커질 때, $(-1)^n$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 즉, $a_n=(-1)^n$은 진동한다.



일반항이 다음과 같이 주어지는 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $a_n=1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$　　　(2) $b_n=(-2)^{n-1}$

(1) 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 나열하면

$$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ \cdots$$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

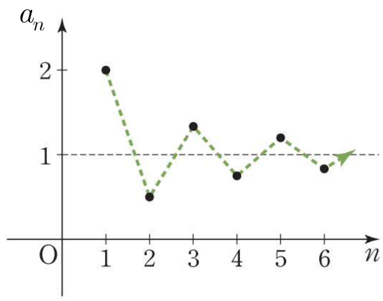
그래프에서 n이 한없이 커질 때,

$1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$의 값이 1에 한없이

가까워지므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 그

극한값은 1이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

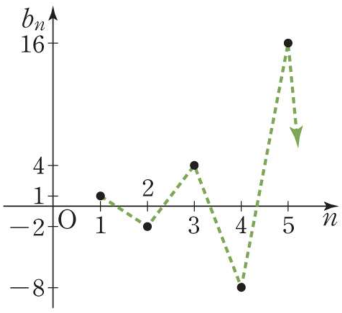


(2) 수열 $\{b_n\}$을 첫째항부터 나열하면

$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots$

이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 n이 한없이 커질 때, $(-2)^{n-1}$의 값은 교대로 양수와 음수가 되면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다. 따라서 수열 $\{b_n\}$은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 진동한다.



02 극한값의 계산

수열의 극한의 성질

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때,

1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (k는 상수)

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$ (복부호동순)

3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$

▷ 수열의 극한의 성질에 대한 증명은 고교 수학의 범위를 벗어나므로 생략한다.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ 임을 이용하여 다음 수열의 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}-1}{2+\dfrac{4}{n}}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + 2\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 1+2\cdot 0 = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} \times \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0\times 0 = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}-1}{2+\dfrac{4}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-1\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{4}{n}\right)} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

극한값의 계산

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

(분자의 차수) > (분모의 차수) ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $-\infty$

(분자의 차수) = (분모의 차수) ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$(최고차항의 계수의 비)

(분자의 차수) < (분모의 차수) ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) $\infty - \infty$꼴

① 다항식의 극한은 최고차항으로 묶는다.

② 무리식의 극한은 분모 또는 분자를 유리화한다.

다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2-4n}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{1+\dfrac{1}{n}} = \infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2-4n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3-\dfrac{4}{n}} = \dfrac{1}{3-0} = \dfrac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2+3)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2+3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}\right)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

수열의 극한의 대소 관계

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

1) $a_n \leq b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\alpha \leq \beta$

2) $a_n \leq c_n \leq b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

▷ 수열의 극한의 대소 관계에 대한 증명은 고교 수학의 범위를 벗어나므로 생략한다.

▷ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이어도 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$일 수 있다.

예) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ 인 경우 $a_n < b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이다.

▷ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이어도 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$가 성립한다.

일반항이 $a_n = \frac{\cos n\theta}{n}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

모든 자연수 n에 대하여 $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$이고, 부등식의 양변을 n으로 나눠주면 $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n\theta}{n} \leq \frac{1}{n}$이 된다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = 0$ 이다.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

$$\frac{2n^2-n}{n^2+1} < a_n < \frac{2n^2+n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ 이다.

03 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

1) $r>1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

3) $-1<r<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

4) $r\le -1$일 때 $\{r^n\}$은 진동 (발산)

▷ $r>1$일 때

수학적 귀납법에 의하여 $(1+h)^n>1+nh$가 성립하므로 $r=1+h$ (단, $h>0$)라고 하면

$$r^n=(1+h)^n>1+nh \text{ (단, } n\ge 2)$$

이때, $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n \ge \lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ $\therefore \lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

▷ $r=1$일 때

모든 n에 대하여 $r^n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

▷ $|r|<1$일 때

$r=0$이면 모든 n에 대하여 $r^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

$r\ne 0$이면 $\dfrac{1}{|r|}>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{|r^n|}=\infty$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

▷ $r\le -1$일 때

i) $r=-1$일 때 : $r^n=(-1)^n$이므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

ii) $r<-1$일 때 : $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$

그런데 항의 부호가 교대로 바뀌므로 $\{r^n\}$은 진동한다.

▷ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴조건은 $-1<r\le 1$이다.

▷ 등비수열 $\{a\cdot r^{n-1}\}$의 수렴조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$이다.

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$ (2) $\{(-\sqrt{2})^n\}$

(3) $\left\{\frac{1}{(-3)^n}\right\}$ (4) $\{6^n\}$

(1) 수열 $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열이고, $-1<\frac{4}{5}<1$이므로 0에 수렴한다.

(2) 수열 $\{(-\sqrt{2})^n\}$은 공비가 $-\sqrt{2}$인 등비수열이고, $-\sqrt{2}<-1$이므로 진동(발산)한다.

(3) 수열 $\left\{\frac{1}{(-3)^n}\right\}$은 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이고, $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

(4) 수열 $\{6^n\}$은 공비가 6인 등비수열이고, $6>1$이므로 양의 무한대로 발산한다.

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n+3\cdot\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2}\cdot 2^n+\frac{1}{3^n}}$ 이므로 $\frac{2\cdot 2^n+3\cdot\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2}\cdot 2^n+\frac{1}{3^n}}$의 분자,

분모를 2^n으로 나누면 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{6^n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6^n}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(2) $\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}$의 분자, 분모를 5^n으로 나누면 $\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\left(\frac{3}{5}\right)^n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{5}$$

수열 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하시오. (단, $r \neq -1$)

i) $-1<r<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n}{1+\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n}=\frac{0}{1+0}=0$

ii) $r=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n}{1+\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

iii) $r>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1$

iv) $r<-1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1$

따라서 $-1<r<1$이면 0에 수렴, $r=1$이면 $\dfrac{1}{2}$에 수렴, $|r|>1$이면 1에 수렴한다.

01 급수의 수렴과 발산

급수와 부분합

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 더한 식

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 이 급수의 제n항까지의 부분합이라 한다.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

급수의 수렴과 발산

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$을 $\{S_n\}$이라 할 때,

1) 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

이때 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$라고 하면 급수는 S에 수렴한고 하며 S를 이 급수의 합이라고 한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

2) 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(1) $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$이므로 부분합 S_n은

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로 부분합 S_n은

$$S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 수렴, 발산과 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 관계

1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. (역은 성립하지 않는다.)

2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

▷ 수렴하는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합을 S_n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$라 하면

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이고, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이 된다.

▷ 위 명제의 역 '$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다' 는 일반적으로 성립하지 않는다.

반례) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$은 발산한다.

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = -\frac{1}{3}(1-0) = -\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

(2) 수열 $\{(-1)^{n-1}\}$은 진동(발산)한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

급수의 성질

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때, 그 합을 각각 S, T라 하면

1) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cS$ (단, c는 상수)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

▷ 수열의 극한의 성질을 이용하면 위와 같은 급수의 성질이 성립함을 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n)$의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\alpha - 3\beta$$

02 등비급수

등비급수

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 급수

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

을 등비급수라고 한다.

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$은

1) $|r|<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

2) $|r| \geq 1$일 때 발산한다.

▷ 첫째항 a, 공비 r인 등비급수의 부분합을 S_n이라 하면

$r=1$일 때 $S_n=a+a+\cdots+a=na$

$r \neq 1$일 때 $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

① $|r|<1 \Leftrightarrow -1<r<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty}(1-r^n)=\frac{a}{1-r}$$

② $r=1$일 때 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} na=\infty$ $(a>0)$ 또는 $-\infty$ $(a<0)$

③ $r>1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$, $1-r<0$이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ $(a>0)$ 또는 $\lim_{n\to\infty} S_n=-\infty$ $(a<0)$

④ $r \leq -1$일 때 수열 $\{r^n\}$은 발산하므로 $\{S_n\}$도 발산한다.

▷ 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(ar^{n-1})$ $(a \neq 0)$의 수렴조건 : $-1<r<1$

다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $3+\sqrt{3}+1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$ (2) $1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^{n-1}}$

(1) 첫째항이 3, 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$인 등비급수이고, $-1<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$이므로

$\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}$로 수렴한다.

(2) 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{2}$인 등비급수이고, $-\sqrt{2}<-1$이므로 발산한다.

(3) 첫째항이 $-\dfrac{3}{4}$, 공비가 $-\dfrac{3}{4}$인 등비급수이고, , $-1<-\dfrac{3}{4}<1$이므로

$\dfrac{-\dfrac{3}{4}}{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}=-\dfrac{3}{7}$로 수렴한다.

(4) 첫째항이 5, 공비가 $\dfrac{5}{3}$인 등비급수이고, $\dfrac{5}{3}>1$이므로 발산한다.

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}$의 합을 구하시오.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{125}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{32}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{125}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{32}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{\frac{125}{6}}{1-\frac{5}{6}}-\frac{\frac{32}{3}}{1-\frac{2}{3}}=125-32\\&=93\end{aligned}$$

급수 $\frac{3}{5}+\frac{3(x-5)}{5^2}+\frac{3(x-5)^2}{5^3}+\cdots$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

첫째항이 $\frac{3}{5}$, 공비가 $\frac{x-5}{5}$인 등비급수이므로 $-1<\frac{x-5}{5}<1$ 즉, $0<x<10$일 때 수렴한다.
따라서 $0<x<10$ 를 만족하는 모든 정수 x들의 합은 $1+2+3+\cdots+9=45$이다.

03 등비급수의 활용

등비급수의 활용

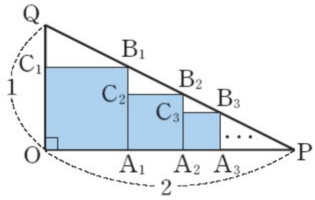
1) 순환소수
 순환소수는 등비급수의 합을 이용하여 기약분수로 고칠 수 있다.

2) 도형과 등비급수
 n번째와 $n+1$번째의 관계식으로부터 공비를 구하여 접근한다.

등비급수를 이용하여 순환소수 $3.\dot{1}\dot{4}$를 기약분수로 나타내시오.

$$
\begin{aligned}
3.\dot{1}\dot{4} &= 3.14141414\cdots \\
&= 3+0.14+0.0014+0.000014+0.00000014+\cdots \\
&= 3+\frac{14}{100}+\frac{14}{100^2}+\frac{14}{100^3}+\frac{14}{100^4}+\cdots \\
&= 3+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{14}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right\} \\
&= 3+\frac{\frac{14}{100}}{1-\frac{1}{100}}=3+\frac{14}{99}=\frac{311}{99}
\end{aligned}
$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}}=2$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1$이고 $\angle\mathrm{QOP}=90°$인 직각삼각형 OPQ에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$을 내접시키고, 다시 직각삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$에 정사각형 $\mathrm{A_1A_2B_2C_2}$를 내접시킨다. 이와 같은 방법으로 정사각형을 계속 만들어 갈 때, 정사각형들의 넓이의 합을 구하시오.



n번째 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라고 하면

$\triangle\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$에서 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=a_n$, $\overline{\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n}=a_{n-1}-a_n$이 된다.

또한 $\triangle\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과 $\triangle\mathrm{QOP}$가 닮은꼴이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{\overline{\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}=\frac{a_{n-1}-a_n}{a_n}$$

즉, $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}$이 된다. 정사각형 한 변의 길이를 나타내는 수열 $\{a_n\}$이 공비 $\frac{2}{3}$인 등비수열이 되므로, 정사각형 넓이를 나타내는 수열의 공비는 $\frac{4}{9}$가 된다. 또한 첫 번째 정사각형 한 변의 길이 $a_1=\frac{2}{3}$이므로 첫 번째 정사각형의 넓이는 $\frac{4}{9}$가 된다. 결국 이들 정사각형 넓이의 합은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{4}{9}$인 등비급수의 합이 된다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n=\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{4}{5}$$