

나형 정답

1	②	2	③	3	⑤	4	③	5	①
6	④	7	②	8	③	9	②	10	④
11	④	12	⑤	13	②	14	①	15	③
16	①	17	⑤	18	①	19	④	20	⑤
21	④	22	42	23	12	24	90	25	6
26	510	27	40	28	18	29	273	30	80

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$3 \times 27^{\frac{1}{3}} = 3 \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3 \times 3 = 9$$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$$A \cap B = \{4\} \text{ 이므로 } a+2=4, b=4$$

따라서 $a+b=2+4=6$

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - n}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{2}$$

4. [출제의도] 역함수 이해하기

$$f(2) + f^{-1}(3) = 4 + 1 = 5$$

5. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^3 (x^2 - 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_0^3 = 3$$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + a) = f(2)$$

$$3 = -4 + a$$

따라서 $a=7$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1 + 3 = 2$$

8. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기

직선 $y=x$ 는

함수 $y = \frac{4}{x-3} + a$ 의 두 점근선의 교점 $(3, a)$ 를 지나므로 $a=3$

9. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\frac{2}{3} = 7P(A \cap B) = 7P(A)P(B) = 7 \times \frac{1}{3} \times P(B)$$

따라서 $P(B) = \frac{2}{7}$

10. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수 $y - (-1) = \sqrt{(x-b)-1} + a$ 의 그래프와

함수 $y = \sqrt{x-4}$ 의 그래프가 일치하므로

$$a=1, b=3$$

따라서 $a+b=4$

11. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기
이 고등학교 3학년 학생 300명 중 임의로 선택한 1명이 영화 관람을 희망한 학생일 사건을 X , 뮤지컬 관람을 희망한 학생일 사건을 Y 라 하면

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{90}{300}}{\frac{210}{300}} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

12. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_a \frac{a^3}{b^2} = \log_a a^3 - \log_a b^2 = 3 - 2\log_a b = 2$$

$$\log_a b = \frac{1}{2}, \log_b a = 2$$

따라서 $\log_a b + 3\log_b a = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$

13. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제해결하기
전기 자동차 배터리 1개의 용량을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(64.2, 0.4^2)$ 을 따른다.

Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$$P(X \geq 65) = P\left(Z \geq \frac{65 - 64.2}{0.4}\right) = P(Z \geq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

14. [출제의도] 등차수열의 성질 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 8d = 2(a + 2d), a = 4d$$

$$\sum_{n=1}^{24} \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{24} \frac{d^2}{a_n a_{n+1}} = d^2 \sum_{n=1}^{24} \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= d \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{24}} - \frac{1}{a_{25}} \right) \right\}$$

$$= d \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{25}} \right) = d \left(\frac{a_{25} - a_1}{a_1 \times a_{25}} \right)$$

$$= d \times \frac{24d}{a \times (a + 24d)} = \frac{24d^2}{4d \times 28d} = \frac{3}{14}$$

15. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 추론하기

$$S(A) = a + b + c + d + e = 37$$

$$S(B) = a + b + c + d + e + 5k = 37 + 5k$$

$$S(B) = S(A \cup B) - S(A - B)$$

$$37 + 5k = 92 - 15 \text{ 따라서 } k = 8$$

(참고) $A = \{2, 4, 9, 10, 12\}$
 $B = \{10, 12, 17, 18, 20\}$

16. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, Z ($X < Y < Z$)라 하자.

X, Y, Z 를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

X 보다 작은 레인 번호의 개수를 a ,
 X 보다 크고 Y 보다 작은 레인 번호의 개수를 b ,
 Y 보다 크고 Z 보다 작은 레인 번호의 개수를 c ,
 Z 보다 큰 레인 번호의 개수를 d 라 하면

$$a + b + c + d = 5 \quad (a \geq 0, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 0)$$

$$b = b' + 1, c = c' + 1$$

$$a + b' + c' + d = 3 \quad (a \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0, d \geq 0)$$

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

3개의 레인 번호 X, Y, Z 를
3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 3!
따라서 $20 \times 3! = 120$

17. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질 이해하기
등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ,
등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_7 = a_6 + d, b_7 = b_6 \times r$$

$$9 + d = 9r$$

$$r = 1 + \frac{d}{9} \text{ 이므로 } d \text{는 } 9 \text{의 배수}$$

$$a_{11} = a_6 + 5d = 9 + 5d$$

$$94 < 9 + 5d < 109, 17 < d < 20$$

d 는 9의 배수이므로 $d=18$

$$9 + 18 = 9r, r = 3$$

$$a_7 + b_8 = (a_6 + d) + (b_6 \times r^2)$$

$$= (9 + 18) + (9 \times 3^2) = 108$$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

꺼낸 3장의 카드의 앞면에 적혀 있는 수를 차례로 α, β, γ 라 할 때, 이를 순서쌍 (α, β, γ) 와 같이 나타내자.

$X=0$ 인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 모두 같은 경우이므로 $(1, 2, 3)$ 의 1가지

$$P(X=0) = \frac{1}{60}$$

$X=1$ 인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 2인 경우이다.
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 2로 같은 경우는 $(1, 2, 4), (1, 2, 5)$ 의 2가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 3 또는 2와 3으로 같은 경우도 각각 2가지이므로

$$P(X=1) = \frac{2 \times 3}{60} = \frac{1}{10}$$

$X=2$ 인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 1인 경우이다.
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1로 같은 경우는 $(1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 2), (1, 4, 5), (1, 5, 2), (1, 5, 4)$ 의 7가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 2 또는 3으로 같은 경우도 각각 7가지이므로

$$P(X=2) = \frac{7 \times 3}{60} = \frac{7}{20}$$

$X=3$ 인 사건의 경우에는

$$P(X=3) = 1 - \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{10} + \frac{7}{20} \right) = \frac{8}{15}$$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{60} + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{8}{15}$$

$$= \frac{12}{5}$$

$$a = \frac{1}{10}, b = \frac{7}{20}, c = \frac{12}{5}$$

따라서 $10a + 20b + 5c = 20$

19. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

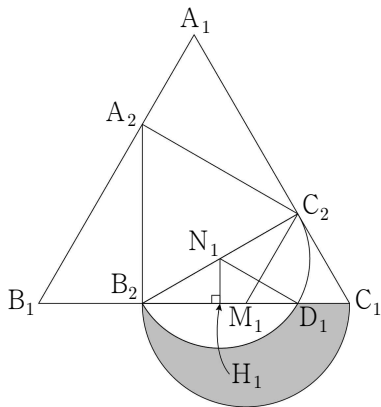
선분 B_1C_1, C_1A_1 을 1:2로 내분하는 점이 각각 B_2, C_2 이므로 $\overline{B_2C_1} = 2, \overline{C_1C_2} = 1$

선분 B_2C_1 을 지름으로 하는 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{B_2C_1}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

선분 B_2C_1, B_2C_2 의 중점을 각각 M_1, N_1 이라 하고, 선분 B_2C_2 를 지름으로 하는 반원의 호와

선분 B_2C_1 의 교점을 D_1 이라 하자.



$\overline{M_1C_1} = \overline{C_1C_2} = 1$, $\angle C_1 = 60^\circ$ 이므로
삼각형 $C_1C_2M_1$ 은 정삼각형
 $\angle B_2M_1C_2 = 120^\circ$

삼각형 $M_1C_2B_2$ 는 $\overline{M_1B_2} = \overline{M_1C_2} = 1$ 인
이등변삼각형이므로 $\angle M_1C_2B_2 = 30^\circ$
삼각형 $B_2C_1C_2$ 는 $\angle C_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형

$$\overline{B_2C_2}^2 = \overline{B_2C_1}^2 - \overline{C_1C_2}^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\overline{B_2C_2} = \sqrt{3}$$

같은 방법으로 $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2A_2} = \sqrt{3}$ 이므로
삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 정삼각형

삼각형 $N_1B_2D_1$ 은
 $\angle B_2N_1D_1 = 120^\circ$,

$\overline{N_1B_2} = \overline{N_1D_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 이등변삼각형

부채꼴 $N_1B_2D_1$ 의 넓이는

$$\pi \times \overline{B_2N_1}^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

점 N_1 에서 선분 B_2D_1 에 내린 수선의 발을
 H_1 이라 하면,

$$\overline{N_1H_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \overline{B_2H_1} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{B_2D_1} = 2\overline{B_2H_1} = \frac{3}{2}$$

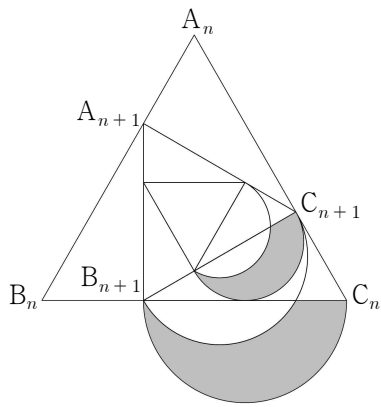
삼각형 $N_1B_2D_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{B_2D_1} \times \overline{N_1H_1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

S_1 = (선분 B_2C_1 을 지름으로 하는 반원의 넓이)
- (부채꼴 $N_1B_2D_1$ 의 넓이)
+ (삼각형 $N_1B_2D_1$ 의 넓이)

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}$$

다음은 그림 R_{n+1} 의 일부이다. ($n \geq 1$)



정삼각형 $A_n B_n C_n$ 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$$\overline{B_{n+1}C_n} = \frac{2}{3}a_n, \overline{C_nC_{n+1}} = \frac{1}{3}a_n$$

삼각형 $B_{n+1}C_nC_{n+1}$ 은

$\angle C_{n+1} = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$(a_{n+1})^2 = \left(\frac{2}{3}a_n\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a_n\right)^2, a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}a_n$$

그림 R_{n+1} 에 새로 색칠된 부분의 넓이를

$$b_{n+1}$$
이라 하면 $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n, b_1 = S_1$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}$ 이고,

공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k$$

$$= \frac{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{12\pi + 9\sqrt{3}}{32}$$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x) = f(-x)$ 이고 방정식 $f(x) = 0$ 의
서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f(0) = c = 0$

$$f(1) = a + b + 0 = -\frac{3}{4}, f'(-1) = -4a - 2b = 1$$

$$a = \frac{1}{4}, b = -1$$

ㄱ. $f(0) = 0$ (참)

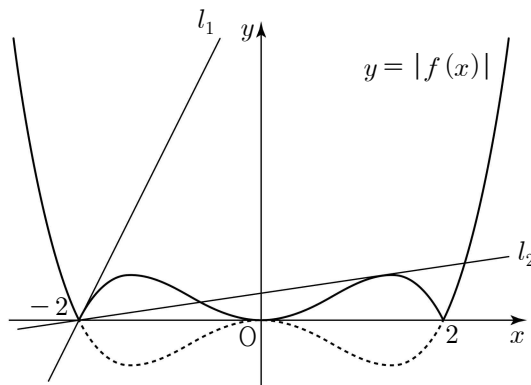
$$\text{ㄴ. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 = \frac{1}{4}x^2(x+2)(x-2)$$

$$\alpha = -2, \beta = 0, \gamma = 2$$

$$f'(x) = x^3 - 2x$$

$$f'(\alpha) = f'(-2) = -4 \text{ (참)}$$

ㄷ.



곡선 $y = -f(x)$ 위의 점 $(-2, 0)$ 에서의
접선 l_1 의 기울기는 $-f'(-2) = -(-4) = 4$

점 $(-2, 0)$ 에서 곡선 $y = -f(x)$ 에 그은
접선 중 하나를 l_2 라 할 때,

접점을 $(t, -\frac{1}{4}t^4 + t^2)$ ($t \neq -2, 0$)이라 하자.

직선 l_2 의 기울기는

$$-f'(t) = -(t^3 - 2t) = -t^3 + 2t$$

직선 l_2 의 방정식은

$$y = (-t^3 + 2t)(x - t) - \frac{1}{4}t^4 + t^2$$

직선 l_2 가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = (-t^3 + 2t)(-2 - t) - \frac{1}{4}t^4 + t^2$$

$$t(3t - 4)(t + 2)^2 = 0, t = \frac{4}{3}$$

$$-f'\left(\frac{4}{3}\right) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{27}$$

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선
 $y = k(x+2)$ 의 교점의 개수는

(i) $0 < k < \frac{8}{27}$ 일 때, 5개

(ii) $k = \frac{8}{27}$ 일 때, 4개

(iii) $\frac{8}{27} < k < 4$ 일 때, 3개

(iv) $k \geq 4$ 일 때, 2개

그러므로 방정식 $|f(x)| = k(x+2)$ 의
서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는

양수 k 의 범위는 $\frac{8}{27} < k < 4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 접선의 방정식과 합성함수를
활용하여 문제해결하기

점 $(0, t)$ 를 지나는 직선이

곡선 $y = x^3 - ax^2 + 3x - 5$ 와 접할 때의 접점을
 $(k, k^3 - ak^2 + 3k - 5)$ 라 하자.

$$y' = 3x^2 - 2ax + 3 \text{ 이므로}$$

접선의 방정식은

$$y = (3k^2 - 2ak + 3)(x - k) + k^3 - ak^2 + 3k - 5$$

이고, 이 접선이 점 $(0, t)$ 를 지나므로

$$t = -2k^3 + ak^2 - 5$$

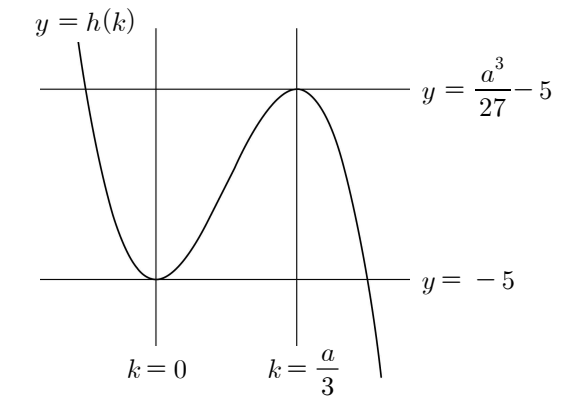
$f(t)$ 는 곡선 $y = -2k^3 + ak^2 - 5$ 와
직선 $y = t$ 의 교점의 개수이다.

$h(k) = -2k^3 + ak^2 - 5$ 라 하면,

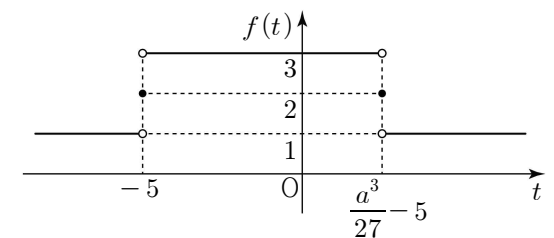
$$h'(k) = -6k^2 + 2ak = -2k(3k - a)$$

$$h'(0) = h'\left(\frac{a}{3}\right) = 0$$

$$h(0) = -5, h\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} - 5$$



$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t < -5) \\ 2 & (t = -5) \\ 3 & (-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5) \\ 2 & (t = \frac{a^3}{27} - 5) \\ 1 & (t > \frac{a^3}{27} - 5) \end{cases}$$



$$g(t) = f(f(t)) = \begin{cases} f(1) & (t < -5) \\ f(2) & (t = -5) \\ f(3) & (-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5) \\ f(2) & (t = \frac{a^3}{27} - 5) \\ f(1) & (t > \frac{a^3}{27} - 5) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 에서

(i) $\frac{a^3}{27} - 5 < 3$ 인 경우

$-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5$ 일 때, $g(t) = f(3) = 1$ 이므로 조건(가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{a^3}{27} - 5 = 3$ 인 경우

$t < -5, t > \frac{a^3}{27} - 5$ 일 때, $g(t) = f(1) = 3$

$t = -5, \frac{a^3}{27} - 5$ 일 때, $g(t) = f(2) = 3$

$-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5$ 일 때, $g(t) = f(3) = 2$

함수 $g(t)$ 의 치역의 원소의 개수가 2이므로 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{a^3}{27} - 5 > 3$ 인 경우

실수 전체의 집합에서

$f(t) \leq 3 < \frac{a^3}{27} - 5$ 이므로 $g(t) = 3$ 이다.

이는 조건(가), (나)를 모두 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 조건을

만족시키는 a 의 범위는 $a^3 > 8 \times 27 = 6^3$

자연수 a 의 최솟값 $m = 7$,

$g(m) = f(f(7)) = 3$

따라서 $m + g(m) = 7 + 3 = 10$

22. [출제의도] 순열 계산하기

$${}_7P_2 = 7 \times 6 = 42$$

23. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x) = 4x^3 - 10x, f'(2) = 12$$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

$$(3x+1)^5 = \sum_{r=0}^5 {}_5C_r (3x)^{5-r} \times 1^r$$

$$5-r=2, r=3$$

$$\text{따라서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_5C_3 \times 3^2 = 90$$

25. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시간 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 는

$$v(t) = 3t^2 - 6t + a$$

$$v(3) = 3 \times 3^2 - 6 \times 3 + a = 15$$

$$\text{따라서 } a = 6$$

26. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$$\text{판별식 } D = (a_{n+1})^2 - 4(a_n)^2 = 0$$

$$(a_{n+1} + 2a_n)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a_{n+1} = 2a_n$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^8 a_k = \frac{2(2^8-1)}{2-1} = 510$$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$$b = \frac{a^3}{2}, S_1 = S_2 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^3 dx = \int_1^a \left(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{2}x^3 \right) dx$$

$$\left[\frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = \left[\frac{a^3}{2}x - \frac{1}{8}x^4 \right]_1^a$$

$$a^3(3a-4) = 0, a > 1 \text{이므로 } a = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } 30a = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

28. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기

$$f(2) \leq 2, f(3) \leq 3, f(5) \leq 5, f(7) \leq 7$$

$$f(1) < f(2) < f(4) < f(8)$$

함수 f 가 일대일 대응이므로

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$$

$f(5)$ 가 될 수 있는 값은 4, 5

$f(7)$ 이 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7

(i) $f(5) = 4$ 인 경우

$f(7) = 5$ 일 때,

$f(4), f(6), f(8)$ 이 될 수 있는 값은 6, 7, 8

$f(6)$ 을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1$

남겨진 두 수 중에서 작은 수를 $f(4)$,

큰 수를 $f(8)$ 에 대응시키면 되므로

$${}_3C_1 \times 1 = 3$$

$f(7) = 6, f(7) = 7$ 일 때, $f(4), f(6), f(8)$ 을

정하는 경우의 수도 각각 3이므로

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 = 9$

(ii) $f(5) = 5$ 인 경우

(i)의 경우와 같은 방법으로

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 = 9$

(i), (ii)에 의하여 함수 f 의 개수는 18

29. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a (a \neq 0)$,

공차를 d 라 하면

$$S_9 = S_{18} \text{이므로}$$

$$\frac{9(2a+8d)}{2} = \frac{18(2a+17d)}{2}$$

$$a = -13d$$

$$S_n = \frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n(n-27)$$

$$S_1 = S_{26} = -13d,$$

$$S_2 = S_{25} = -25d,$$

$$S_3 = S_{24} = -36d,$$

$$\vdots$$

$$S_{13} = S_{14} = -91d,$$

$$S_{27} = 0, S_{28} = 14d, S_{29} = 29d, \dots$$

집합 T_n 의 원소의 개수가 13이 되도록 하는

자연수 n 의 값은 13, 14, ..., 26

따라서 모두 자연수 n 의 값의 합은

$$13+14+15+\dots+26 = 273$$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

모든 실수 t 에 대해서 $|f'(t)| \geq 0$ 이고,

$$g(a) = \int_0^a |f'(t)| dt = -8 < 0 \text{이므로 } a < 0$$

$x \geq -3$ 에서 $|f'(x)| \geq 0$ 이므로

함수 $g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$ 는 증가한다.

삼차함수 $f(x)$ 는

$x = -3$ 과 $x = a (a > -3)$ 에서 극값을

가지므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이면

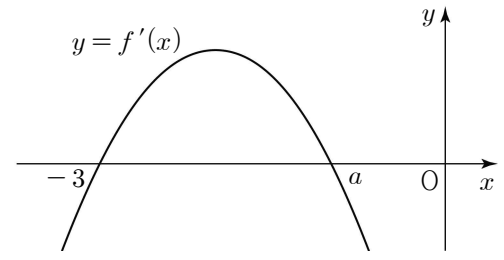
$x < -3$ 에서 $f(x)$ 는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서

증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는

음수이다.



(i) $x < -3$ 일 때, $g(x) = f(x)$

(ii) $-3 \leq x < a$ 일 때,

$$g(x) = \int_0^a \{-f'(t)\} dt + \int_a^x f'(t) dt = f(x) + f(0) - 2f(a)$$

(iii) $x \geq a$ 일 때,

$$g(x) = \int_0^x \{-f'(t)\} dt = -f(x) + f(0)$$

함수 $g(x)$ 는 $x = -3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \{f(x) + f(0) - 2f(a)\} = f(-3) + f(0) - 2f(a)$$

$$f(-3) = f(-3) + f(0) - 2f(a)$$

$$f(0) = 2f(a) \dots \textcircled{1}$$

$$g(a) = -f(a) + f(0) = -8 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $f(0) = -16, f(a) = -8$

$$f'(x) = k(x+3)(x-a)$$

$= k\{x^2 + (3-a)x - 3a\} (k < 0)$ 이라 하면

$$f(x) = k\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3-a}{2}x^2 - 3ax\right) - 16$$

$$g(-3) = f(-3) = \frac{9}{2}k(a+1) - 16 = -16$$

$$k \neq 0 \text{이므로 } a = -1$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -1) \\ -f(x) - 16 & (x \geq -1) \end{cases}$$

$$\int_a^4 \{f(x) + g(x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^4 \{f(x) + (-f(x) - 16)\} dx$$

$$= \int_{-1}^4 (-16) dx = -16 \times 5 = -80$$

$$\text{따라서 } \left| \int_a^4 \{f(x) + g(x)\} dx \right| = 80$$

(참고)

$$f(x) = -2x^3 - 12x^2 - 18x - 16$$

함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형

