# 01 수열의 뜻



**수열**

어떤 규칙에 따라 차례대로 나열된 수의 열을 수열이라 하고, 그 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.
이때 수열의 각 항을 앞에서부터 차례대로

$$\text{첫째항, 둘째항, 셋째항, } \cdots, \ n\text{번째항, } \cdots$$

또는

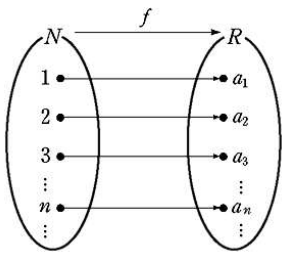
$$\text{제}1\text{항, 제}2\text{항, 제}3\text{항, } \cdots, \text{ 제}n\text{항, } \cdots$$

이라고 한다.
일반적으로 수열을 나타낼 때는 항의 번호가 붙은 문자의 열을 사용하여

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_n, \ \cdots$$

과 같이 나타낸다. 이때 제$n$번째항 $a_n$을 수열의 일반항이라고 하고, 일반항이 $a_n$인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

▷ 일반적으로 수열 $\{a_n\}$은 $n=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$에 이 수열의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$을 차례대로 대응시킨 것이므로 수열 $\{a_n\}$은 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수로 볼 수 있다. 따라서 수열 $\{a_n\}$의 제$n$항 $a_n$은 $a_n=f(n)$으로 볼 수 있고, $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 수열의 각 항을 정할 수 있으므로, $a_n$을 수열 $\{a_n\}$의 일반항이라고 한다.




수열 $1, 3, 7, 15, 31, \cdots$ 을 $\{a_n\}$이라고 하자. $a_7$을 구하시오.

나열된 수들에는 다음과 같은 규칙이 있다.

$$a_2-a_1=2, \ a_3-a_2=4, \ a_4-a_3=8, \ a_5-a_4=16,$$
$$a_6-a_5=32, \ a_7-a_6=64, \ \cdots$$

이런 규칙을 이용하면 $a_6=a_5+32=63$, $a_7=a_6+64=127$이 됨을 알 수 있다.

수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 주어질 때, 수열의 일반항 $a_n$을 구하시오.

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$  (2) $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots$

(1) 분자의 규칙과 분모의 규칙을 따로 생각하여 일반항을 구하면 $a_n = \frac{n}{n+1}$이 됨을 알 수 있다.

(2) $a_1 = 10-1,\ a_2 = 100-1,\ a_3 = 1000-1,\ \cdots$의 규칙이 있으므로 일반항은 $a_n = 10^n - 1$이 된다.

# 02 등차수열

## 등차수열

이웃하는 두 항 사이의 차가 일정한 수열

$$a_{n+1}-a_n=d \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}=a_n+d$$

이 때, 두 항 사이의 일정한 차를 공차라고 하며 $d$로 표기한다.

▷ 수열 $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots$은 첫째항 1에서 시작하여 각 항에 일정한 수 $4$를 더하여 얻어진 수열이다.

$$1 \underbrace{\quad}_{+4} 5 \underbrace{\quad}_{+4} 9 \underbrace{\quad}_{+4} 13, \quad \cdots$$

다음 등차수열의 공차를 구하시오.

(1) $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots$　　(2) $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ \cdots$

(1) 주어진 등차수열은 $3$씩 증가하므로 공차는 $3$이다.
(2) 주어진 등차수열은 $-2$씩 증가하므로 공차는 $-2$이다.

## 등차수열의 일반항

첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=a+(n-1)d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

| (첫째항) | (둘째항) | (셋째항) | (넷째항) | $\cdots\cdots$ | (제 $n$ 항) | $\cdots\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\cdots\cdots$ | $a_n$ | $\cdots\cdots$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | $\downarrow$ | |
| $a$ | $a+d$ | $a+2d$ | $a+3d$ | $\cdots\cdots$ | $a+(n-1)d$ | $\cdots\cdots$ |

▷ 등차수열의 일반항은 $n$에 대한 일차식이며 $n$의 계수가 공차 $d$가 된다. 따라서 일반항이 $a_n=pn+q$로 주어지는 수열은 첫째항이 $p+q$, 공차가 $p$인 등차수열이 된다.

다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(1) $17,\ 12,\ 7,\ 2,\ \cdots$ (2) 제3항이 $12$, 제6항이 $18$

(1) 주어진 수열의 첫째항이 $17$, 공차가 $-5$이므로 일반항은

$$a_n = 17 + (n-1)\times(-5) = -5n + 22$$

(2) 첫째항을 $a_1$, 공차를 $d$라고 하면 연립방정식

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ a_1 + 5d = 18 \end{cases}$$ 로부터 $a_1 = 8,\ d = 2$를 얻을 수 있다.

$$a_n = 8 + (n-1)\times 2 = 2n + 6$$

## 등차중항

세 수 $a,\ b,\ c$가 순서대로 등차수열을 이룰 때, 아래의 등식이 성립하며 이 때, $b$를 $a$와 $c$의 등차중항이라 한다.

$$2b = a + c \iff b = \frac{a+c}{2} \quad (b\text{는 } a,\ c\text{의 산술평균})$$

▷ 세 수 $a, b, c$가 등차수열을 이룬다고 하면 $a, b, c$ 각각을 $a,\ a+d,\ a+2d$로 생각할 수 있다.

$$2b = a + c \iff 2(a+d) = a + a + 2d$$

다음 수열이 등차수열을 이루도록 $x,\ y$의 값을 구하시오.

(1) $2,\ x,\ 5$ (2) $4,\ x,\ y,\ 16$

(1) $x = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$

(2) $x = \dfrac{4+y}{2},\ y = \dfrac{x+16}{2}$에서 $x = 8,\ y = 12$

## 등차수열의 합

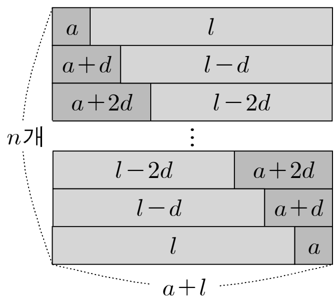
첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열에서 제1항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면,

(1) $S_n = \dfrac{n}{2}\left(a+l\right)$ ($l$은 제$n$항)　　(2) $S_n = \dfrac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$

▷ 첫째항이 $a$, 공차가 $d$, 제$n$항이 $l$인 등차수열에서 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-d) + l \\ +)\; S_n = & l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a \\ \hline 2S_n = & (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) \\ = & n \times (a+l) \end{array}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n(a+l)}{2} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$




여기서, $l$은 제$n$항이므로 $l = a+(n-1)d$

$l$을 ①에 대입하면 $S_n = \dfrac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 제$n$항까지의 합 $S_n$을 구하시오.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2\} = n^2$$

세 자리 자연수 중에서 9의 배수의 합을 구하시오.

9의 배수는 공차가 9인 등차수열이 된다. 9의 배수 중 가장 작은 세 자리 자연수는 108이므로 첫째항이 108, 공차가 9인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하고 이것의 일반항을 구해보면 $a_n = 9n+99$이다. 9의 배수 중 가장 큰 세 자리 자연수는 999이고 이는 수열 $\{a_n\}$의 100번째 항이므로 수열 $\{a_n\}$의 제1항부터 제100항까지의 합을 구하면 된다.

$$S_{100} = \frac{100 \times (108+999)}{2} = 55350$$

# 03 등비수열



## 등비수열

이웃하는 두 항 사이의 비가 일정한 수열

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \iff a_{n+1}=ra_n$$

이 때, 일정한 비를 공비라고 하며 $r$로 표기한다.

▷ 수열 $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots$은 첫째항 1에서 시작하여 각 항에 일정한 수 3를 곱하여 얻어진 수열이다.

$$1, \xrightarrow{\times 3} 3, \xrightarrow{\times 3} 9, \xrightarrow{\times 3} 27, \quad \cdots$$

다음 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구하시오.

(1) $64,\ 32,\ 16,\ 8,\ \cdots$　　(2) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots$

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$로 일정하므로 공비는 $\dfrac{1}{2}$이다.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$로 일정하므로 공비는 $-2$이다.

## 등비수열의 일반항

첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=ar^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

| (첫째항) | (둘째항) | (셋째항) | (넷째항) | $\cdots$ | (제$n$항) | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\cdots$ | $a_n$ | $\cdots$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\cdots$ | $\downarrow$ | $\cdots$ |
| $a$ | $ar$ | $ar^2$ | $ar^3$ | $\cdots$ | $ar^{n-1}$ | $\cdots$ |

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 $2$이고 공비가 $3$인 등비수열이라고 할 때, $1458$는 제$n$항이다. 자연수 $n$의 값을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2 \cdot (3)^{n-1}$이므로 $1458 = 2 \cdot (3)^{n-1}$에서 $n = 7$이 된다.

**등비중항**

세 수 $a$, $b$, $c$가 차례로 등비수열을 이룰 때, 아래의 등식이 성립하며, $b$를 $a$와 $c$의 등비중항이라 한다.

$$b^2 = ac$$

▷ 세 수 $a, b, c$가 등비수열을 이루면 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$이므로 $b^2 = ac$가 성립한다.

$a, b, 12$가 이 순서로 등차수열을 이루고 $a$, $b$, $16$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하시오.

등차중항으로부터 $2b = a + 12 \quad \cdots ①,$

등비중항으로부터 $b^2 = 16a \quad \cdots ②$

①에서 $a = 2b - 12$를 ②에 대입하면

$$b^2 - 32b + 192 = 0, \quad (b-24)(b-8) = 0$$

따라서 $\begin{cases} a = 36 \\ b = 24 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$의 두 쌍의 해를 얻을 수 있다.

## 등비수열의 합

첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비수열의 제1항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라하면

(1) $r=1$이면 $S_n=na$, (2) $r\neq 1$이면 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

▷ $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$ ………… ①

①의 양변에 $r$을 곱하면

$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$ ………… ②

①에서 ②를 빼면

$$\begin{array}{rl} S_n = & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ -\big)\quad rS_n = & \quad\;\; ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a-ar^n=a(1-r^n) \end{array}$$

$S_n-rS_n=a-ar^n$ $\therefore$ $(1-r)S_n=a(1-r^n)$

$r\neq 1$이면 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$이면 ①에서 $S_n=a+a+a+\cdots+a=na$

공비 $r$이 실수인 등비수열의 제2항이 $-9$이고 제5항이 243일 때, 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하시오.

첫째항을 $a$, 공비를 $r$이라 하면 이 등비수열의 일반항은

$$a_n=ar^{n-1}$$

$n=2$, $n=5$를 각각 대입하면

$a_2=ar=-9$ …… ①

$a_5=ar^4=243$ …… ②

② ÷ ①을 하면 $r^3=-27$이고, 공비 $r$은 실수이므로 $r=-3$

이것을 ①에 대입하면 $a=3$

$$\therefore S_{10}=\frac{3\cdot\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{1-(-3)^{10}\}$$

# 01 $\sum$의 뜻과 성질

**합의 기호**

합의 기호 $\sum$ : 수열의 합을 간단하게 나타내기 위한 기호로 다음과 같이 약속한다.

좌변의 끝항의 번호 (제$n$항까지)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\sum$ 위의 $n$: 좌변의 끝항의 번호 (제$n$항까지)

$a_k$: 좌변의 $k$ 번째 항 (일반항)

$\sum$ 아래의 $k=1$: 좌변의 시작항의 번호 (제$1$항부터)

다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 이용하여 나타내시오.

(1) $1+3+5+\cdots+19$ (2) $2+4+8+\cdots+2^{n-1}$

(1) $1+3+5+\cdots+19=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$

(2) $2+4+8+\cdots+2^{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

## $\sum$의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, $c$는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, $c$는 상수)

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) (1)과 같은 방법으로 보일 수 있다.

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=8$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k+2)$의 값을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k+2)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-3\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2$$

$$=(2\times15)-(3\times8)+(2\times10)$$

$$=30-24+20=26$$

# 02 여러 가지 수열의 합

**자연수 거듭제곱의 합**

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}^2$

(1) 첫째항 1, 공차 1인 등차수열의 제$n$항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\{2+(n-1)\cdot 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$ 을 사용하여 아래와 같이 유도

$k=1$ 일 때 $\quad (1+1)^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$

$k=2$ 일 때 $\quad (2+1)^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$

$k=3$ 일 때 $\quad (3+1)^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$

$\qquad\vdots \qquad\qquad \vdots$

$k=n$ 일 때 $\quad +)\ (n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$

(변끼리 더하면) $\quad \displaystyle (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n\cdot 1$

$$n^3+3n^2+3n+1-1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) 항등식 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$ 을 이용 (2) 와 같이 유도

$\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k-2)$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k-2) &= \sum_{k=1}^{10}\left(k^3-3k^2+2k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{10} k^3-3\sum_{k=1}^{10} k^2+2\sum_{k=1}^{10} k\\ &= \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-3\times\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+2\times\frac{10\cdot 11}{2}\\ &= 55^2-(3\times 55\times 7)+(2\times 55)\\ &= 55\,(55-21+2)\\ &= 55\times 36\\ &= 1980\end{aligned}$$

## 분수로 표시된 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

다음 수열의 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{100+1}=\frac{100}{101}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{81}-1=8$

## 수열의 합과 일반항과의 관계

수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 할 때

$$\begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ a_1 = S_1 \end{cases}$$

▷ 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

①−②하면 $a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$

또, 첫째항 $a_1$은 제1항까지의 합과 같아야 하므로 $a_1 = S_1$

$$\overbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n}^{S_n}$$

첫째항부터 $n$항까지의 합이 다음과 같이 주어진 경우의 일반항을 구하시오.

(1) $S_n = 2n^2 + 4n$　　　　(2) $S_n = 2n^2 + 4n + 1$

(1) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n^2 + 4n) - \{2(n-1)^2 + 4(n-1)\}$

$= (2n^2 + 4n) - (2n^2 - 4n + 2 + 4n - 4)$

$= 4n + 2 \quad (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 6$

$\therefore\ a_n = 4n + 2$

(2) $a_n = 4n + 2\ (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 7$

$\therefore\ a_1 = 7,\ a_n = 4n + 2\ (n \geq 2)$

첫째항부터 $n$항까지의 합이 다음과 같이 주어진 경우의 일반항을 구하시오.

(1) $S_n = 2^{n+1} - 2$ (2) $S_n = 3^n + 1$

(1) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n+1} - 2) - \{2^n - 2\}$

$= 2^n(2-1)$

$= 2^n \quad (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 2$

$\therefore \ a_n = 2^n$

(2) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3^n + 1) - \{3^{n-1} + 1\}$

$= 3^{n-1}(3-1)$

$= 2 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 4$

$\therefore \ a_1 = 4, \ a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$

# 01 수열의 귀납적 정의

**수열의 귀납적 정의**

다음과 같이 첫째항 그리고 이웃하는 항들 사이의 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항들을 구할 수 있다. 이와 같이 첫째항과 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 한다.

$$\begin{cases} \text{첫째항 } a_1 \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n \text{과 } a_{n+1} \text{ 사이의 관계식 } (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

▷ 다음은 첫째항이 $1$이고 공차가 $3$인 등차수열을 귀납적으로 정의한 것이다.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

▷ 다음은 첫째항이 $2$이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열을 귀납적으로 정의한 것이다.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times a_n \end{cases}$$

▷ 경우에 따라서는 다음과 같이 이웃한 세 항 사이의 관계식이 주어지기도 한다.

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \quad \Rightarrow \text{ 등차수열}$$
$$(a_{n+1})^2 = a_n \cdot a_{n+2} \quad \Rightarrow \text{ 등비수열}$$

이런 경우에는 첫째항 이외에 둘째항 혹은 셋째항이 추가로 주어져야 한다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_5$를 구하시오. (단, $n=1, 2, 3,$ ...)

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 4a_n + 3$

이웃한 항들 사이의 관계식에 $n=1$ 부터 차례대로 대입하여 $a_5$를 구한다.

(1)

$$a_2 = a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$
$$a_3 = a_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$$
$$a_4 = a_3 + 2^3 = 7 + 8 = 15$$
$$a_5 = a_4 + 2^4 = 15 + 16 = 31$$

(2)

$$a_2 = 4 \cdot a_1 + 3 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$$
$$a_3 = 4 \cdot a_2 + 3 = 4 \cdot 7 + 3 = 31$$
$$a_4 = 4 \cdot a_3 + 3 = 4 \cdot 31 + 3 = 127$$
$$a_5 = 4 \cdot a_4 + 3 = 4 \cdot 127 + 3 = 511$$

# 02 수학적 귀납법

**수학적 귀납법**

명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n$에 대하여 성립함을 다음과 같이 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

자연수 $n$에 관한 어떤 명제 $p(n)$에 대하여

[1] $n=1$일 때, $p(1)$이 성립함을 증명한다.

[2] $n=k$일 때, $p(k)$가 성립한다고 가정하여, $n=k+1$일 때, $p(k+1)$도 성립함을 증명한다.

수학적 귀납법을 사용하여 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

[1] $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=$(우변) 이므로 성립

[2] $n=k$일 때 성립한다고 가정하면,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하고 정리하면

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식은 성립한다.

[1], [2]에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다.

$h>0$일 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 $n$에 대하여

$$(1+h)^n > 1+nh$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

[1] $n=2$일 때, (좌변)=$(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$=(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

[2] $n=k\ (k \geq 2)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh \qquad \cdots\cdots ①$$

$1+h>0$이므로 부등식 ①의 양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h) > (1+kh)(1+h)$

그런데 $(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$

$\therefore\ (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

[1], [2]에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$인 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다.