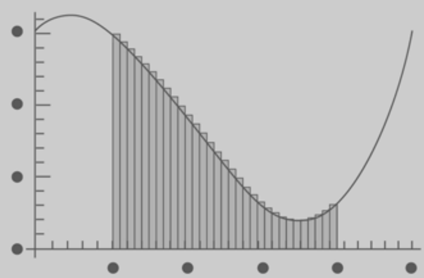
막간 2 ✺ 적분법



"조지, 난 무언가를 거꾸로 하는 걸 정말 좋아한다네.

미분을 거꾸로 계산할 수 있을까?"

"물론이지, 레니. 그걸 적분이라 부른다네."

연습 문제 1: 미분 과정을 뒤집고 상수를 더해서 다음 각 함수들의 부정적분을 구하라.

해답: 미적분의 기본 정리에 의해 $f(t)=\frac{d}{dt}F(t)$이면

$$\int f(t)dt = F(t)+c \quad (c\text{는 적분 상수})$$

의 관계가 성립한다. 이를 이용해 주어진 $f(t)$에 대해 $F(t)$를 추론해 부정적분을 구할 수 있다.

① $f(t)=t^4$

$t^4 = \frac{d}{dt}\frac{1}{5}t^5$이므로 $F(t)=\frac{1}{5}t^5$.

$$\therefore \int f(t)dt = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + c.$$

② $f(t)=\cos t$

$\cos t = \frac{d}{dt}\sin t$이므로 $F(t)=\sin t$.

$$\therefore \int f(t)dt = \int \cos t dt = \sin t + c.$$

③ $f(t)=t^2-2$

$t^2-2 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{3}t^3-2t)$ 이므로 $F(t)=\frac{1}{3}t^3-2t$.

$$\therefore \int f(t)dt = \int (t^2-2)dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t + c.$$

연습 문제 2: 미적분의 기본 정리를 이용해 연습 문제 1의 각 적분을 적분 한도 $t=0$에서 $t=T$까지 계산하라.

해답:

① $f(t)=t^4$

$$\int_0^T t^4 dt=\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^T=\frac{1}{5}T^5-\frac{1}{5}\times 0=\frac{1}{5}T^5.$$

② $f(t)=\cos t$

$$\int_0^T \cos t dt=[\sin t]_0^T=\sin T-\sin 0=\sin T.$$

③ $f(t)=t^2-2$

$$\int_0^T (t^2-2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t\right]_0^T=\frac{1}{3}T^3-2T.$$

연습 문제 3: 연습 문제 1의 각 함수를 어떤 입자의 가속도로 간주한다. 시간에 대해 한 번 적분해서 속도를 구하고, 두 번 적분해서 궤적을 구하라. t를 적분의 한도 중 하나로 쓸 것이므로 t'을 적분 변수로 도입한다. $t'=0$에서 $t'=t$까지 다음을 적분하라.

해답: 가속도 $a(t)$에 대해 속도는 $v(t)=\int a(t)dt$이고 위치는 $x(t)=\int v(t)dt$이다.

① $a(t)=t^4$

$$v(t)=\int_0^t a(t')dt'=\int_0^t t'^4 dt'=\left[\frac{1}{5}t'^5\right]_0^t=\frac{1}{5}t^5$$

$$x(t)=\int_0^t v(t')dt'=\int_0^t \frac{1}{5}t'^5 dt'=\left[\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}t'^6\right]_0^t=\frac{1}{30}t^6.$$

② $a(t)=\cos t$

$$v(t)=\int_0^t \cos t'dt'=[\sin t']_0^t=\sin t$$

$$x(t)=\int_0^t \sin t'dt'=[-\cos t']_0^t=-\cos t-(-\cos 0)=-\cos t+1.$$

③ $a(t) = t^2 - 2$

$$v(t) = \int_0^t (t'^2 - 2)dt' = \left[\frac{1}{3}t'^3 - 2t'\right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

$$x(t) = \int_0^t (\frac{1}{3}t'^3 - 2t')dt' = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}t'^4 - 2 \times \frac{1}{2}t'^2\right]_0^t = \frac{1}{12}t^4 - t^2.$$

연습 문제 4: 계산을 마무리하라. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx.$

해답: 부분 적분 계산법 $\int \frac{df}{dx} g\, dx = fg - \int f \frac{dg}{dx} dx$를 이용해 구할 수 있다. $\frac{df}{dx} = \cos x, g = x$라고 하면, $f = \sin x, \frac{dg}{dx} = 1$이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) x dx &= [(\sin x)x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= [(\sin x)x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= (\sin \frac{\pi}{2}) \times \frac{\pi}{2} - (\sin 0) \times 0 - \left\{ -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \right\} \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 - (-0 - (-1)) = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}
$$