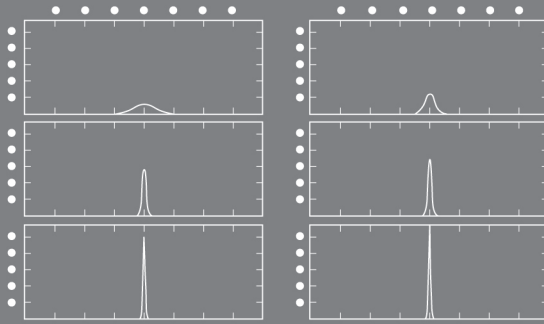


8강

입자와 파동



아트와 레니는 이제까지 충분히 업힘을 즐겼다.

이 둘은 조금 더 간단한 무언가를 할 준비가 되었다.

레니: 힐베르트 선생님, 1차원에서 무언가를 가지고 계신가요?

힐베르트: 한번 살펴보지. 단일 차원은 최근에 아주 인기가 많아.

가끔은 물건이 동나기도 해.

아트: 저는 고전적인 것에 만족해요. 가진 게 그것뿐이라면요.

힐베르트: 여기서 안 돼, 이 친구야. 면허가 취소될 걸세.

아트: 그렇군요.

연습 문제 8.1: X 와 D 는 선형 연산자임을 증명하라.

해답: 우선 X 연산자부터 알아보자.

$$\begin{aligned} X(\psi_1(x) + \psi_2(x)) &= x(\psi_1(x) + \psi_2(x)) = x\psi_1(x) + x\psi_2(x) \\ &= X\psi_1(x) + X\psi_2(x) \end{aligned}$$

$$X(z\psi_1(x)) = x(z\psi_1(x)) = xz\psi_1(x) = z x\psi_1(x) = z(X\psi_1(x)).$$

그리고 D 연산자도 알아보자.

$$\begin{aligned} D(\psi_1(x) + \psi_2(x)) &= \frac{d}{dx}(\psi_1(x) + \psi_2(x)) = \frac{d\psi_1(x)}{dx} + \frac{d\psi_2(x)}{dx} \\ &= D\psi_1(x) + D\psi_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(z\psi_1(x)) &= \frac{d}{dx}(z\psi_1(x)) = \frac{dz\psi_1(x)}{dx} = z \frac{d\psi_1(x)}{dx} \\ &= z(D\psi_1(x)). \end{aligned}$$

따라서 X 와 D 는 모두 선형 연산자이다.