수학'나'형 정답

1	④	2	①	3	②	4	③	5	③
6	⑤	7	①	8	①	9	⑤	10	②
11	③	12	②	13	⑤	14	④	15	④
16	②	17	①	18	⑤	19	④	20	③
21	②	22	20	23	5	24	21	25	17
26	8	27	22	28	200	29	28	30	320

해 설

1. [출제의도] 기호의 뜻을 알고 집합의 원소의 개수를 센다.

집합 A의 원소의 개수는 4이므로

$n(A)=4$

2. [출제의도] 간단한 거듭제곱근을 계산한다.

$$\begin{aligned}\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}&=\sqrt{2^2}\times\sqrt[3]{2^3}\\&=2\times2\\&=4\end{aligned}$$

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\\&=0+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. [출제의도] 등비수열이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

세 수 3, -6, a가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\dfrac{-6}{3}=\dfrac{a}{-6}$

$3\times a=(-6)^2$

따라서

$a=12$

5. [출제의도] 합성함수의 함숫값을 구한다.

두 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-3$, $g(x)=x+1$에서

$f(3)=\sqrt{3+1}-3=-1$

$g(-1)=0$

따라서 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(-1)=0$

6. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 모든 원소의 합을 구한다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로

$B^C=\{2,\ 4,\ 6\}$

$$\begin{aligned}A\cap B^C&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\cap\{2,\ 4,\ 6\}\\&=\{2,\ 4\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$2+4=6$

[다른 풀이]

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로

$$\begin{aligned}A\cap B^C&=A-B\\&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}-\{1,\ 3,\ 5\}\\&=\{2,\ 4\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$2+4=6$

7. [출제의도] 평행이동을 이해하여 유리함수의 그래프의 두 점근선을 구한다.

함수 $y=\dfrac{1}{x+3}+8$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=8$이므로

$a=-3$, $b=8$이다.

따라서 $a+b=-3+8=5$

8. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 극한값을 구한다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+1}{a_n+3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\dfrac{1}{a_n}}{1+\dfrac{3}{a_n}}\\&=\frac{-2+0}{1+3\times0}\\&=-2\end{aligned}$$

9. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 등식을 만족시키는 실수의 값을 구한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}=a+\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}$

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=a+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}$

$1=a+\dfrac{1}{6}$

따라서 $a=\dfrac{5}{6}$

10. [출제의도] 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\log\sqrt{419}&=\frac{1}{2}\log419\\&=\frac{1}{2}\log(4.19\times100)\\&=\frac{1}{2}(\log4.19+\log100)\\&=\frac{1}{2}(\log4.19+2)\text{이고}\end{aligned}$$

상용로그표에서 $\log4.19=0.6222$

따라서

$$\begin{aligned}\log\sqrt{419}&=\frac{1}{2}(0.6222+2)\\&=1.3111\end{aligned}$$

11. [출제의도] 등비급수가 수렴하도록 하는 정수의 개수를 구한다.

x가 정수일 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\dfrac{2x-3}{7}$인 등비급수이다.

그러므로 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<\dfrac{2x-3}{7}<1$이다.

$-7<2x-3<7$

$-4<2x<10$

$-2<x<5$

따라서 정수 x의 개수는

$5-(-2)-1=6$

12. [출제의도] 로그의 밑을 변환하여 식의 값을 구한다.

밑의 변환 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_4 18}+\frac{2}{\log_9 18}&=\log_{18}4+2\log_{18}9\\&=\log_{18}2^2+2\log_{18}3^2\\&=\log_{18}2^2+\log_{18}(3^2)^2\\&=\log_{18}2^2+\log_{18}3^4\\&=\log_{18}(2^2\times3^4)\\&=\log_{18}(2\times3^2)^2\\&=\log_{18}18^2\\&=2\log_{18}18\\&=2\end{aligned}$$

13. [출제의도] 명제가 참이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

명제 $p\to q$의 역이 참이므로 명제 $q\to p$가 참이다.

그러므로 $Q\subset P$가 성립해야 한다.

$4\in Q$이므로 $4\in P$이어야 한다.

$a^2=4$, 즉 $a=2$ 또는 $a=-2$

(i) $a=-2$일 때

$P=\{2,\ 3,\ 4\}$, $Q=\{-1,\ 4\}$이므로

$Q\not\subset P$

(ii) $a=2$일 때

$P=\{2,\ 3,\ 4\}$, $Q=\{3,\ 4\}$이므로

$Q\subset P$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a=2$

14. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

그러므로

$$\begin{aligned}b&=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}\\&=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}\\&=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}\\&=2\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a&=\sqrt[3]{3}b\\&=\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}\\&=2\sqrt[3]{3^2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}ab&=2\sqrt[3]{3^2}\times2\sqrt[3]{3}\\&=4\sqrt[3]{3^3}\\&=4\times3\\&=12\end{aligned}$$

15. [출제의도] 충분조건이 되도록 하는 자연수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

두 조건 p, q에 대한 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$p\to\sim q$가 참이면 이 명제의 대우인 $q\to\sim p$도 참이므로 $Q\subset P^C$이어야 한다.

$P=\{x\mid |x|\geq a\}$이므로

$$\begin{aligned}P^C&=\{x\mid |x|<a\}\\&=\{x\mid -a<x<a\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q&=\{x\mid x(x-3)\leq0\}\\&=\{x\mid 0\leq x\leq3\}\end{aligned}$$

그러므로 $\{x\mid 0\leq x\leq3\}\subset\{x\mid -a<x<a\}$에서

$-a<0$이고 $a>3$이어야 하므로 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4

[다른 풀이]

두 조건 p, q에 대한 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid |x|\geq a\}=\{x\mid x\leq-a$ 또는 $x\geq a\}$,

$Q=\{x\mid x(x-3)\leq0\}=\{x\mid 0\leq x\leq3\}$

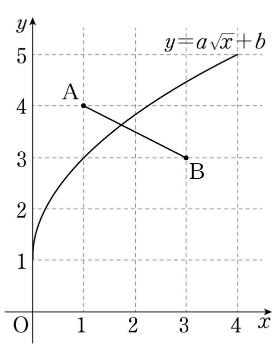
p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이면 $P\subset Q^C$이어야 한다.

$Q^C=\{x\mid x<0$ 또는 $x>3\}$에서

$-a<0$이고 $a>3$이어야 하므로 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4

16. [출제의도] 무리함수의 그래프와 선분이 만나도록 하는 자연수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



a, b는 자연수이므로

(i) $a=1$인 경우

함수 $f(x)=\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1)\le 4$이고 $f(3)\ge 3$이어야 하므로

$\sqrt{1}+b\le 4$이고 $\sqrt{3}+b\ge 3$

따라서 $3-\sqrt{3}\le b\le 3$

이를 만족시키는 자연수 b는 2, 3이므로

순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(1, 3)$

(ii) $a=2$인 경우

함수 $f(x)=2\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1)\le 4$이고 $f(3)\ge 3$이어야 하므로

$2\sqrt{1}+b\le 4$이고 $2\sqrt{3}+b\ge 3$

$3-2\sqrt{3}\le b\le 2$

이를 만족시키는 자연수 b는 1, 2이므로

순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$

(iii) $a=3$인 경우

함수 $f(x)=3\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1)\le 4$이고 $f(3)\ge 3$이어야 하므로

$3\sqrt{1}+b\le 4$이고 $3\sqrt{3}+b\ge 3$

$3-3\sqrt{3}\le b\le 1$

이를 만족시키는 자연수 b는 1이므로

순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$

(iv) $a\ge 4$인 경우 $f(1)=a+b>4$이므로

함수 $f(x)=a\sqrt{x}+b$의 그래프는 선분 AB와 만나지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $2+2+1=5$

17. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, 3)$에서 만나므로 $f(1)=3$이고 $g(1)=3$이다.

이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(1)=3$에서 $f(3)=1$

$f(1)=\sqrt{a+b}+1=3$에서

$a+b=4$ …… ㉠

$f(3)=\sqrt{3a+b}+1=1$에서

$3a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$a=-2,\ b=6$

그러므로 $f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$

$g(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$f(k)=\sqrt{-2k+6}+1=5$에서 $\sqrt{-2k+6}=4$

$-2k+6=16$

$k=-5$

따라서 $g(5)=-5$

18. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 수열의 극한을 구하는 과정을 증명한다.

$\mathrm{P}_n(2n, 0)$, $\mathrm{Q}_n(0, 4n^2)$이므로

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 기울기는

$\frac{0-4n^2}{2n-0}=\frac{-4n^2}{2n}$

$=-2n$이고

y절편은 $4n^2$이므로

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 방정식은 $y=\boxed{-2n}\times x+4n^2$

x좌표가 k(k는 $2n-1$ 이하의 자연수)일 때 영역에 속하는 점의 y좌표는 $(k-2n)^2$부터 $\boxed{-2n}\times k+4n^2$까지이므로 그 개수는

$\boxed{-2n}\times k+4n^2-(k-2n)^2+1=\boxed{-k^2+1}+2nk$

$a_n=\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\boxed{-k^2+1}+2nk\right)$

$=-\frac{(2n-1)\times 2n\times(4n-1)}{6}+(2n-1)+2n\times\frac{(2n-1)\times 2n}{2}$

$=-\frac{n(2n-1)(4n-1)}{3}+(2n-1)+2n^2(2n-1)$

$=(2n-1)\left\{2n^2-\frac{n(4n-1)}{3}+1\right\}$

$=(2n-1)\left(\frac{2}{3}n^2+\frac{n}{3}+1\right)$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\left(\frac{2}{3}n^2+\frac{n}{3}+1\right)}{n^3}=\boxed{\frac{4}{3}}$

$f(n)=-2n$, $g(k)=-k^2+1$, $p=\frac{4}{3}$이고

$f(3)=-6$, $g(4)=-15$

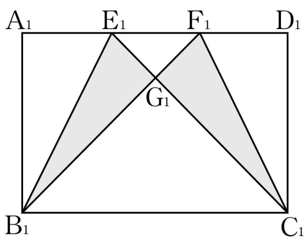
따라서

$p\times f(3)\times g(4)=\frac{4}{3}\times(-6)\times(-15)$

$=120$

19. [출제의도] 도형의 닮음을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\overline{\mathrm{A_1F_1}}=2$이므로 삼각형 $\mathrm{A_1B_1F_1}$은 직각이등변삼각형이고 $\angle \mathrm{G_1B_1C_1}=45°$이다.

$\overline{\mathrm{D_1C_1}}=\overline{\mathrm{D_1E_1}}=2$이므로 삼각형 $\mathrm{D_1C_1E_1}$은 직각이등변삼각형이고 $\angle \mathrm{G_1C_1B_1}=45°$이다.

그러므로 $\angle \mathrm{B_1G_1C_1}=90°$이고, 삼각형 $\mathrm{G_1B_1C_1}$은 직각이등변삼각형이다.

또한, $\angle \mathrm{G_1E_1F_1}=45°$, $\angle \mathrm{G_1F_1E_1}=45°$이므로 삼각형 $\mathrm{G_1E_1F_1}$도 직각이등변삼각형이다.

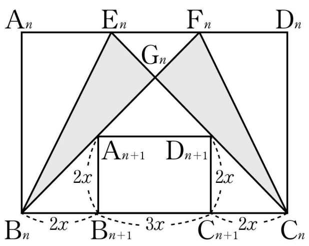
$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{B_1G_1}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\mathrm{E_1F_1}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{E_1G_1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $a_1=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}$



$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=2x$라 하면 $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=3x$이고

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=2x+3x+2x=7x$이므로

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=3x=\frac{3}{7}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 직사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비가 $1:\frac{3}{7}$이므로, 그림 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 a_{n+1}은

$a_{n+1}=\left(\frac{3}{7}\right)^2a_n=\frac{9}{49}a_n$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$이고 공비가 $\frac{9}{49}$인 등비수열이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{49}}$

$=\frac{147}{80}$

20. [출제의도] 수열이 수렴할 조건과 극한값을 추론한다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은

$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (참)

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은

$p+q,\ -p+q,\ p+q,\ -p+q,\ \cdots$

이므로 $p=0$인 경우 수열 $\{b_n\}$은

$q,\ q,\ q,\ \cdots$

가 되어 수렴한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은

$1+p+q,\ 2-p+q,\ 1+p+q,\ 2-p+q,\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1+p+q=2-p+q$

$p=\frac{1}{2}$

수열 $\{a_nb_n\}$은

$1\times(p+q),\ 2\times(-p+q),\ 1\times(p+q),\ 2\times(-p+q),\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1\times(p+q)=2\times(-p+q)$

$q=3p$

그러므로

$q=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

그러면 $1+p+q=2-p+q=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$

또한, $1\times(p+q)=2\times(-p+q)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3^2-2\times 2=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[다른 풀이]

ㄷ. $a_n+b_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}+\{p\times(-1)^{n+1}+q\}$

$=\left(\frac{1}{2}-p\right)(-1)^n+\frac{3}{2}+q$이므로

수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면

$\frac{1}{2}-p=0$, 즉 $p=\frac{1}{2}$이어야 한다.

$p=\frac{1}{2}$일 때,

$a_nb_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q\right\}$

$=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\times(-1)^n+q\right\}$

$=-\frac{1}{4}\times(-1)^{2n}+\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n+\frac{3}{2}q$

$=\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면

$\frac{q}{2}-\frac{3}{4}=0$, 즉 $q=\frac{3}{2}$이어야 한다.

그러므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{2}+q$

$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$

$= -\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=2$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3^2-2\times2=5$

21. [출제의도] 항등함수와 상수함수의 뜻을 이해하여 함수를 추론한다.

함수 $f: X\to X$ 가 일대일 대응이 아니라고 가정하면
합성함수 $g\circ f: X\to X$ 는
일대일 대응이 아니게 되므로 항등함수도 아니다.
이런 경우 조건 (나)를 만족시키지 않게 되므로
함수 f는 일대일 대응이어야 한다.
마찬가지 이유로 함수 g도 일대일 대응이다.
두 일대일 대응 f, g에 대하여

$\sum_{n=1}^{9}f(n)=1+2+\cdots+9=45$,

$\sum_{n=1}^{9}g(n)=1+2+\cdots+9=45$ 이므로

$\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9}f(n)+\sum_{n=1}^{9}g(n)$

$=45+45$

$=90$

조건 (다)에서 $f(x)+g(x)$ 의 값은 일정하므로
$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)라 하자.

$\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9}k=9k$ 이므로

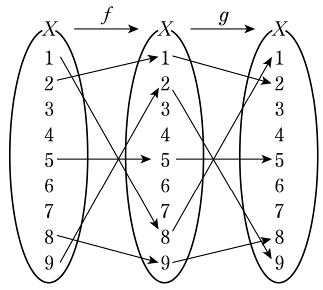
$9k=90$ 에서 $k=10$

모든 $x\in X$ 에 대하여

$f(x)+g(x)=10$ …… ㉠

조건 (가)에서

$f(1)=8$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$g(8)=1$
$g(8)=1$ 이므로 ㉠에 의하여
$f(8)=9$
$f(8)=9$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$g(9)=8$
$g(9)=8$ 이므로 ㉠에 의하여
$f(9)=2$
$f(9)=2$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$g(2)=9$
$g(2)=9$ 이므로 ㉠에 의하여
$f(2)=1$
$f(2)=1$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$g(1)=2$
$f(5)=a$라 하면
조건 (나)에 의하여
$g(a)=5$
$g(a)=5$ 이면 ㉠에 의하여
$f(a)=5$
$f(a)=5$ 이면 조건 (나)에 의하여
$g(5)=a$
이때 $10=f(5)+g(5)=a+a=2a$ 이므로
$a=5$
즉 $f(5)=5$ 이고 ㉠에 의하여 $g(5)=5$
이상의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



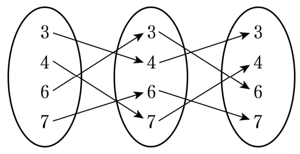
조건 (가)에 의하여 $f(3)\neq6$ 이므로

(ⅰ) $f(3)=3$ 이면
조건 (나)에 의하여
$g(3)=3$
㉠에 의하여 $g(3)=7$ 이므로
이 경우는 불가능하다.

(ⅱ) $f(3)=7$ 이면
조건 (나)에 의하여
$g(7)=3$
$g(7)=3$ 이면 ㉠에 의하여
$f(7)=7$
함수 f가 일대일 대응이 아니게 되므로 이 경우는 불가능하다.

(ⅲ) $f(3)=4$ 이면
조건 (나)에 의하여
$g(4)=3$
$g(4)=3$ 이면 ㉠에 의하여
$f(4)=7$
$f(4)=7$ 이면 조건 (나)에 의하여
$g(7)=4$
$g(7)=4$ 이면 ㉠에 의하여
$f(7)=6$
$f(7)=6$ 이면 조건 (나)에 의하여
$g(6)=7$
$g(6)=7$ 이면 ㉠에 의하여
$f(6)=3$
$f(6)=3$ 이면 조건 (나)에 의하여
$g(3)=6$

(ⅲ)의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



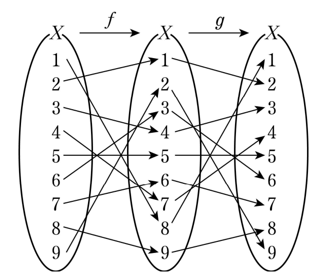
따라서

$(f\circ f\circ f)(7)=f(f(6))$

$=f(3)$

$=4$

[참고] 함수 f와 g는 다음과 같다.



22. [출제의도] 첫째항과 공차가 주어진 등차수열의 항을 계산한다.

첫째항이 10이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=10+(n-1)\times5$

$=5n+5$

따라서

$a_3=5\times3+5$

$=20$

23. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_2(2^2\times2^3)=\log_2 2^{2+3}$

$=\log_2 2^5$

$=5\log_2 2$

$=5$

24. [출제의도] 부분합의 극한과 수열의 일반항의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3S_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}S_n$

$=2\times0+3\times7$

$=21$

25. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$2^{-a}+2^{-b}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}$

$=\frac{2^a+2^b}{2^{a+b}}$

$=\frac{9}{4}$ …… ㉠

그런데 $2^a+2^b=2$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$

$2^{a+b}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$, $p+q=17$

26. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이므로 $a_1>0$
이때 $a_2=2-6=-4$
$a_2<0$ 이므로
$a_3=a_2+p=-4+p$

(ⅰ) $-4+p\geq0$, 즉 $p\geq4$일 때

$a_4=2-a_3$

$=2-(-4+p)$

$=6-p$

$=0$ 에서

$p=6$

(ⅱ) $-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때

$a_4=a_3+p$

$=(-4+p)+p$

$=-4+2p$

$=0$ 에서

$p=2$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은 $6+2=8$

27. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 실생활 문제를 해결한다.

직업 체험을 신청한 학생의 집합을 A, 대학 탐방을 신청한 학생의 집합을 B라 하자.
직업 체험과 대학 탐방을 모두 신청한 학생은 5명이므로

$n(A\cap B)=5$ …… ㉠

직업 체험과 대학 탐방 중 어느 것도 신청하지 않은 학생은 3명이므로

$n((A\cup B)^C)=3$

그러므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=31-3=28$ …… ㉡

직업 체험을 신청한 학생 수는 대학 탐방을 신청한 학생 수의 2배이므로

$n(A)=2\times n(B)$ …… ㉢

그런데

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$28=2\times n(B)+n(B)-5$

$n(B)=11$

$n(A)=2\times 11=22$

따라서 직업 체험을 신청한 학생 수는 22

28. [출제의도] 두 직선의 교점을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\dfrac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned}3d&=a_7-a_4\\&=5-\frac{7}{2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$d=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}a_1&=a_4-3d\\&=\frac{7}{2}-3\times\frac{1}{2}\\&=2\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{25}a_k$의 값은 첫째항이 2이고 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{25}a_k&=\frac{25\left\{2\times 2+(25-1)\times\frac{1}{2}\right\}}{2}\\&=\frac{25\times 16}{2}\\&=200\end{aligned}$$

[다른 풀이 1]

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\dfrac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned}3d&=a_7-a_4\\&=5-\frac{7}{2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$d=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}a_{13}&=a_7+6d\\&=5+3\\&=8\end{aligned}$$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{25}a_k&=(a_1+a_{25})+(a_2+a_{24})+\cdots+(a_{12}+a_{14})+a_{13}\\&=2a_{13}+2a_{13}+\cdots+2a_{13}+a_{13}\\&=12\times 2a_{13}+a_{13}\\&=25a_{13}\\&=25\times 8\\&=200\end{aligned}$$

[다른 풀이 2]

$a_4=\dfrac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로

직선 l은 두 점 $\left(4,\ \dfrac{7}{2}\right)$, $(7,\ 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\dfrac{5-\frac{7}{2}}{7-4}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}$이므로

직선 l의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}(x-4)+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 $a_n=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{25}a_k&=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{25\times 26}{2}+\frac{3}{2}\times 25\\&=\frac{25\times 13+3\times 25}{2}\\&=\frac{25\times 16}{2}\\&=25\times 8\\&=200\end{aligned}$$

29. [출제의도] 명제가 참이 되도록 하는 부분집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 $x^2-3x<0$의 진리집합을 P라 하면

$x(x-3)<0$에서 $0<x<3$이므로

$P=\{1,\ 2\}$

명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.' 가 참이 되기 위해서는 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

그러므로 $A=\{1\}$ 또는 $A=\{2\}$ 또는 $A=\{1,\ 2\}$이다.

명제 '집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.' 가 참이 되기 위해서는 $A\cap B\neq\varnothing$이어야 한다.

(i) $A=\{1\}$인 경우
집합 B는 1을 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는 $2^3=8$

(ii) $A=\{2\}$인 경우
집합 B는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는 $2^3=8$

(iii) $A=\{1,\ 2\}$인 경우
집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

iii-가) 1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

iii-나) 2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

iii-다) 1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $8+8+(4+4+4)=28$

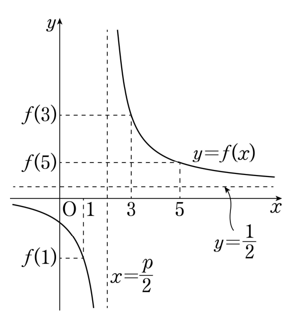
30. [출제의도] 유리함수의 그래프와 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}=\frac{\frac{1}{2}(2x-p)+\frac{p}{2}+2n}{2x-p}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{p}{2}+2n}{2x-p}$$

이고 $\dfrac{p}{2}+2n>0$이므로

$f(1)<f(5)<f(3)$ …… ㉠

이 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1<\dfrac{p}{2}<3$이어야 하므로 $2<p<6$에서 자연수 p의 최솟값 m은 3

함수 $g(x)=\dfrac{2x+n}{x+q}=\dfrac{2(x+q)+n-2q}{x+q}=2+\dfrac{n-2q}{x+q}$

이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 방정식은

$x=-q,\ y=2$

$p=3$일 때 $f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-3}$에 대하여

$x_1=f(1)=-2n-1$

$x_2=f(5)=\dfrac{2n+5}{7}$

$x_3=f(3)=\dfrac{2n+3}{3}$

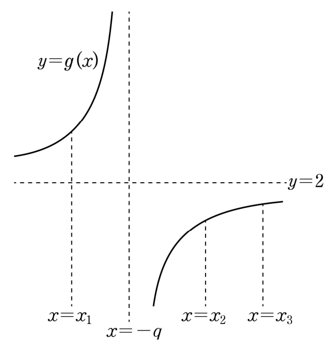
이라 하면 ㉠으로부터

$x_1<x_2<x_3$

이때 문제의 조건에서

$g(x_2)<g(x_3)<g(x_1)$이 성립해야 하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1<-q<x_2$이고 $n-2q<0$이어야 한다.

즉 $-2n-1<-q<\dfrac{2n+5}{7}$이고 $q>\dfrac{n}{2}$이어야 하므로

$\dfrac{n}{2}<q<2n+1$

(i) $n=2l-1$ (l은 자연수)일 때

$\dfrac{2l-1}{2}<q<2(2l-1)+1$에서

$l-\dfrac{1}{2}<q<4l-1$이므로

$q=l,\ l+1,\ \cdots,\ 4l-2$

그러므로 정수 q의 개수는 $3l-1$

(ii) $n=2l$ (l은 자연수)일 때

$\dfrac{2l}{2}<q<2\times 2l+1$에서

$l<q<4l+1$이므로

$q=l+1,\ l+2,\ \cdots,\ 4l$

그러므로 정수 q의 개수는 $3l$

(i), (ii)에 의하여 $a_{2l-1}=3l-1,\ a_{2l}=3l$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{l=1}^{10}(a_{2l-1}+a_{2l})\\&=\sum_{l=1}^{10}(3l-1+3l)\\&=\sum_{l=1}^{10}(6l-1)\\&=6\sum_{l=1}^{10}l-\sum_{l=1}^{10}1\\&=6\times\frac{10\times 11}{2}-10\\&=330-10=320\end{aligned}$$