2021학년도 대학수학능력시험 대비

2020학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 '나'형 정답

1	③	*2*	④	*3*	④	*4*	④	*5*	⑤
6	②	*7*	④	*8*	⑤	*9*	③	*10*	②
11	①	*12*	⑤	*13*	③	*14*	①	*15*	④
16	⑤	*17*	③	*18*	①	*19*	②	*20*	②
21	①	*22*	55	*23*	19	*24*	840	*25*	10
26	6	*27*	8	*28*	34	*29*	63	*30*	41

해 설

1. [출제의도] 함수의 극한을 계산하여 값을 구한다.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)=\lim\limits_{x\to2}x^2+\lim\limits_{x\to2}5=4+5=9$

2. [출제의도] 지수를 계산하여 주어진 방정식의 해를 구한다.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=64$, $(4^{-1})^{-x}=4^3$, $4^x=4^3$ 이므로 $x=3$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 값을 구한다.

θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$

4. [출제의도] 세 항 사이의 관계를 이해하여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d$, $a_3=a+2d$

이를 주어진 등식에 대입하면

$(a+d)+(a+2d)=2(a+12)$, $3d=24$

따라서 $d=8$

5. [출제의도] 정적분을 계산하여 값을 구한다.

$$\int_5^2 2t\,dt-\int_5^0 2t\,dt=\int_5^2 2t\,dt+\int_0^5 2t\,dt$$
$$=\int_0^5 2t\,dt+\int_5^2 2t\,dt=\int_0^2 2t\,dt$$
$$=\Big[t^2\Big]_0^2=4$$

6. [출제의도] 연속함수의 정의를 이해하여 함숫값을 구한다.

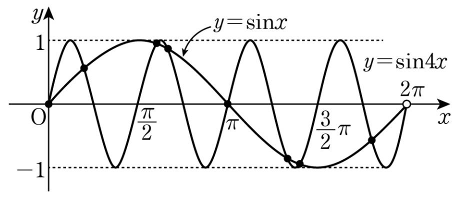
$x\neq1$일 때 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$

7. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

함수 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고 함수 $y=\sin 4x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

8. [출제의도] 로그의 정의를 이해하여 주어진 식의 값을 구한다.

$a^p=-p$, $a^{2q}=-q$이므로

$a^p\times a^{2q}=(-p)\times(-q)$, $a^{p+2q}=pq$

따라서 로그의 정의에 의해 $p+2q=\log_a pq=-8$

9. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

한편, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$에서 $f'(2)=9$

$f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x+a$

그러므로 $f'(2)=3\times2^2-4\times2+a=a+4$

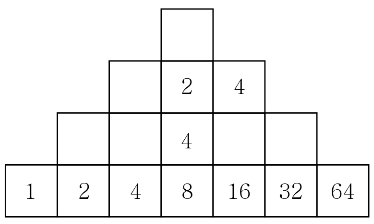
따라서 $a+4=9$에서 $a=5$

10. [출제의도] 주어진 규칙을 추론하여 등비수열의 합을 구한다.

문제에서 제시된 세 번째 줄의 4와 인접한 아래쪽 칸의 수는 주어진 규칙에 의해 4의 2배인 8이다.

규칙으로부터 네 번째 줄의 8과 인접한 왼쪽 칸의 수는 그 수를 2배하여 8이 되어야 하므로 4이다.

이와 같은 방식으로 네 번째 줄에 있는 수를 모두 구하여 왼쪽부터 차례대로 나열하면 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다.



그러므로 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이다.

따라서 구하는 값은 $\dfrac{1\times(2^7-1)}{2-1}=127$

11. [출제의도] 주어진 두 수열의 관계를 이해하여 등차수열의 제3항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_n=3+(n-1)d$, $b_n=3r^{n-1}$

$b_3=-a_2$를 $a_2+b_2=a_3+b_3$에 대입하면

$a_2+b_2=a_3-a_2=d$

그러므로 $3+d+3r=d$, $3r=-3$에서 $r=-1$ …… ㉠

$b_3=-a_2$에서 $3r^2=-(3+d)$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $3\times(-1)^2=-3-d$에서 $d=-6$

따라서 $a_3=3+2\times(-6)=-9$

12. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하여 함수의 연속성을 판단한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\times\lim\limits_{x\to1-}g(x)=0\times(-1)=0$

(거짓)

ㄴ. $f(1)=0$, $g(1)=-1$이므로 $f(1)g(1)=0\times(-1)=0$

(참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+}g(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\times\lim\limits_{x\to1+}g(x)=1\times1=1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=0$에서

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)$이므로

극한값 $\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

13. [출제의도] 이차함수의 성질과 도함수의 정의를 이해하여 함숫값을 구한다.

이차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하므로

$f(x)=(x-a)^2$ (단, a는 상수이다.)

$f(x)=(x-a)(x-a)$이므로

$f'(x)=2(x-a)$

$g(x)=(x-3)f'(x)=2(x-a)(x-3)$

$\quad=2x^2-2(a+3)x+6a$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 x의 계수가 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$에서 $f(0)=3^2=9$

14. [출제의도] 여러 가지 순열의 수를 구하는 과정을 추론한다.

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.

(ⅰ) 숫자 2를 한 번 사용한 경우

2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\dfrac{6!}{5!\,1!}+\dfrac{6!}{4!\,2!}+\dfrac{6!}{3!\,3!}+\dfrac{6!}{2!\,4!}+\dfrac{6!}{1!\,5!}=\boxed{62}$이다.

2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3\times62=\boxed{186}$이다.

(ⅲ) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이므로 나머지 자리에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3을 나열하여 만든 것이다.

그러므로 그 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!\,1!}+\dfrac{4!}{2!\,2!}+\dfrac{4!}{1!\,3!}=\boxed{14}$이다.

그러므로 $p=62$, $q=186$, $r=14$

따라서 $p+q+r=262$

[다른 풀이]

(ⅲ) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이다.

즉, 구하려는 값은 1, 3을 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수에서 1을 네 개, 3을 네 개 선택한 경우의 수 2를 뺀 값이므로 ${}_2\Pi_4-2=2^4-2=\boxed{14}$이다.

[보충 설명]

(ⅱ) 숫자 2를 두 번 사용한 경우

2, 2를 십의 자리와 천의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는

나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3 을 나열한 것이므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{4!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{1!4!}=30$ 이다.

2 를 짝수 번째 자리에 두 번 오도록 놓는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 이다.

그러므로 숫자 2 를 두 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3\times30=90$ 이다.

15. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$ 에서 $n=1$ 을 대입하면

$a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$ 이므로 $a_2=2$

$n\geq2$ 일 때 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$ 이므로

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$$
$$=na_n$$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\geq2$)

위 식에 $n=50$ 을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$ 이고 $a_{50}>0$ 이므로 $\frac{a_{51}}{a_{50}}=51$

따라서 $a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

[보충 설명]

2 이상의 자연수 n 에 대하여 $a_n>0$ …… (*)

임을 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.

$a_2=2$ 이고 $n\geq2$ 일 때 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ 이므로

(i) $n=2$ 일 때

$a_2=2>0$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) 2 이상의 자연수 k 에 대하여 $n=k$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면 $a_k>0$

$n=k+1$ 일 때 $a_{k+1}=(k+1)a_k>0$ 이므로 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $a_n>0$ 이다.

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제를 해결한다.

$m=3^x$ 에서 $x=\log_3 m$ 이므로 $\mathrm{A}_m(\log_3 m,\ m)$

$m=\log_2 x$ 에서 $x=2^m$ 이므로 $\mathrm{B}_m(2^m,\ m)$

그러므로 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}=2^m-\log_3 m$

$\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$ 이 자연수이기 위해서는 m 과 2^m 이 자연수이므로 $\log_3 m$ 이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m=3^k$ (단, k 는 음이 아닌 정수이다.)

$m=3^0$ 일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$

$m=3^1$ 일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$

$m=3^2$ 일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$

따라서 $a_3=510$

[보충 설명]

위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$ 이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$ 꼴임을 알 수 있다. 이제 m 의 값이 3^{n-1} 에서 3^n 으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$ 의 값도 증가함을 보이자.

모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1$$
$$=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1$$
$$=7\times2^{3^{n-1}}-1$$

$3^{n-1}\geq1$ 이므로 $2^{3^{n-1}}\geq2$ 이다.

그러므로 $7\times2^{3^{n-1}}-1>0$

따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$ 이 성립한다.

17. [출제의도] 등차중항을 이용하여 등차수열의 합과 관련된 문제를 해결한다.

a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1} 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_{k-2} 는 a_{k-3} 과 a_{k-1} 의 등차중항이다. 즉,

$$a_{k-2}=\frac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}=\frac{-24}{2}=-12$$

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}$$
$$=\frac{k\{42+(-12)\}}{2}=15k$$

따라서 $k^2=15k$ 이고 $k\neq0$ 이므로 $k=15$

[다른 풀이 1]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_3=a+2d=42$ …… ㉠

$a_{k-2}=\frac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}$,

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

$S_k=\frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$ 이고, $k\neq0$ 이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉢

㉢에서 ㉠을 빼면 $a+(k-3)d=2k-42$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $2k-42=-12$ 이므로 $k=15$

[다른 풀이 2]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_3=a+2d=42$, $a=42-2d$ …… ㉠

$a_{k-3}+a_{k-1}=a+(k-4)d+a+(k-2)d=-24$ 이므로

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$42-2d+kd-3d=-12$, $kd-5d=-54$ …… ㉢

$S_k=\frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$ 이고, $k\neq0$ 이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면

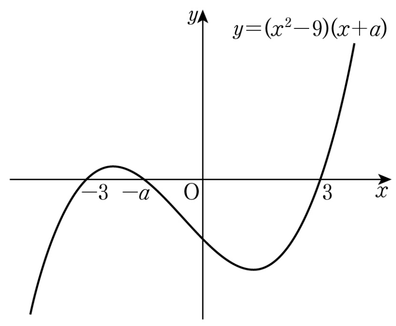
$84-4d+kd-d=2k$, $kd-5d=2k-84$ …… ㉤

㉢, ㉤에서 $2k-84=-54$ 이므로 $k=15$

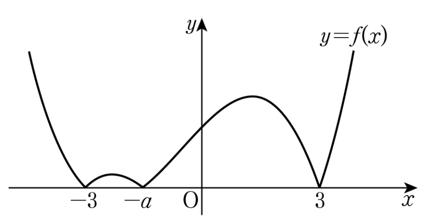
18. [출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하여 극댓값을 구한다.

(i) $0<a<3$ 일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$ 의 그래프는 x 축과 세 점 $(-3,0)$, $(-a,0)$, $(3,0)$ 에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



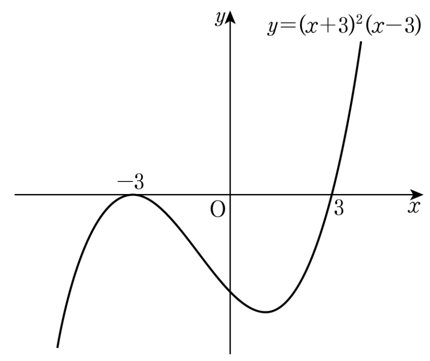
그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



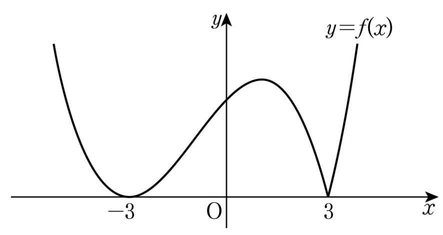
함수 $f(x)$ 는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$ 일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$ 의 그래프는 x 축과 점 $(-3,0)$ 에서 접하고 점 $(3,0)$ 에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



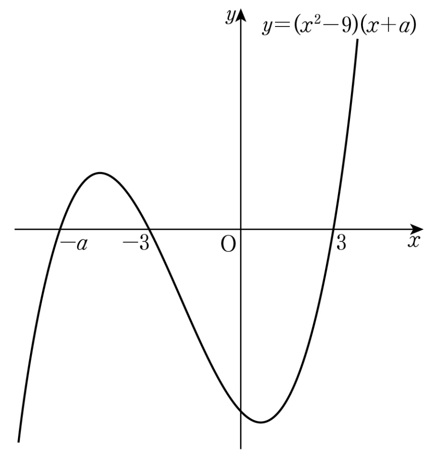
그러므로 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$ 의 그래프 개형은 그림과 같다.



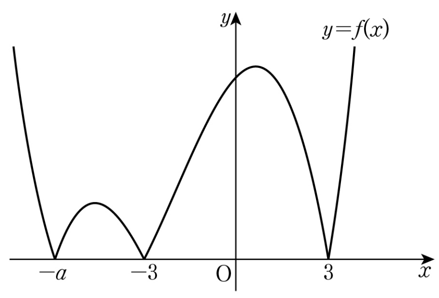
$f(x)$ 는 $x=3$ 에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$ 일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$ 의 그래프는 x 축과 세 점 $(-a,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$ 에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$ 의 극솟값의 절댓값이 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$ 의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$ 의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$ 이므로

$y'=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-3	⋯	1	⋯
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-32	↗

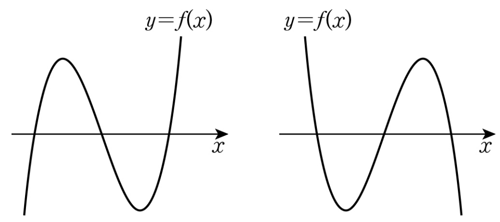
그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$ 은 $x=1$ 에서 극소이고 극솟값은 -32

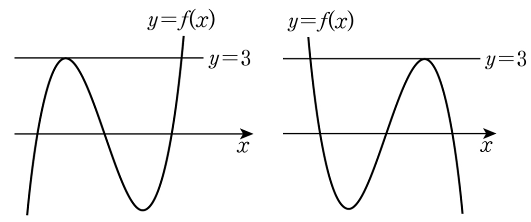
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=|-32|=32$

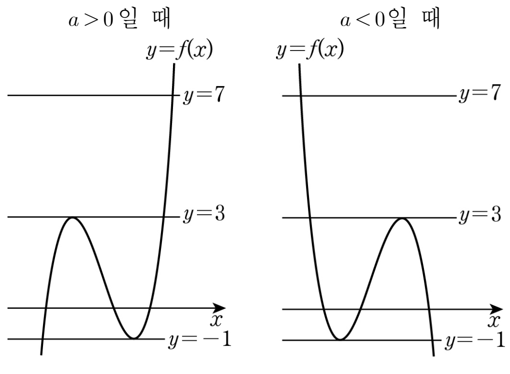
[보충 설명]
$a=3$일 때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않음을 보이자.
$$f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$$
$$=|(x+3)^2(x-3)|$$
$$=\begin{cases} (x+3)^2(x-3) & (x\ge 3) \\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3)\end{cases}$$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, 3)$과 구간 $(3, \infty)$에서 각각 다항함수이므로 함수 $f(x)$는 $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.
그런데
$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$$
$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$$
이므로 극한값 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이 존재하지 않는다.
그러므로 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.
따라서 $f(x)$는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

19. **[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.**
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의해
$$\frac{10}{\sin C}=2\times 3\sqrt{5},\ \sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$$
삼각형 ABC는 예각삼각형이므로
$$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}\text{에서 }\frac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\frac{4}{3}$$
$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$
코사인법칙에 의해
$$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}a^2,$$
$$100=\frac{2}{3}a^2,\ a^2=150$$
따라서 $ab=a^2=150$

20. **[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 함숫값 구하는 문제를 해결한다.**
$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$에서
$g'(x)=f(x)+f'(x)$,
$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt+f(0)=0+f(0)$,
$g'(0)=f(0)+f'(0)$
조건 (가)에 의해
$g(0)=f(0)=0$
$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$이므로 $f'(0)=0$
그러므로 x^2은 $f(x)$의 인수이다.
$f(x)=x^2(x-k)$(단, k는 상수)라 하면
$$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$$
$$=x^3+(3-k)x^2-2kx$$
조건 (나)에 의해 모든 실수 x에 대하여
$g'(-x)=-g'(x)$가 성립한다.
즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,
$2(3-k)x^2=0$에서 $k=3$
그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$
따라서 $f(2)=-4$
[다른 풀이]
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (가)에 의해 $f(0)=0$이므로 $c=0$,
$f'(0)=0$이므로 $b=0$
즉, $f(x)=x^3+ax^2$
$$g'(x)=f(x)+f'(x)$$
$$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$$
$$=x^3+(a+3)x^2+2ax$$
조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0이다. 즉, $a=-3$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2$에서 $f(2)=8-12=-4$

21. **[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값의 합을 구하는 문제를 해결한다.**
함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.
$a>0$일 때 $a<0$일 때


함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.
그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$은 $f(x)=3$인 x에서 최솟값 1을 가지므로 $m=1$
한편, 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2
그러므로 직선 $y=3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.
$a>0$일 때 $a<0$일 때


즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 3
조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면
$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$
$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$
조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$의 실근의 개수를 유추하면 1이므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.
$a>0$일 때 $a<0$일 때


즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -1
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3, 극솟값은 -1이므로 그 합은 $3+(-1)=2$

22. **[출제의도] 자연수의 거듭제곱의 합을 계산하여 값을 구한다.**
$$\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{5\times 6\times 11}{6}=55$$

23. **[출제의도] 미분계수를 계산하여 값을 구한다.**
$f'(x)=4x^3+6x+9$이므로 $f'(1)=19$

24. **[출제의도] 원순열의 정의를 이해하여 원순열의 수를 구한다.**
가운데 원에 색칠하는 경우의 수는 7
가운데 원에 칠한 색을 제외한 6가지 색을 모두 사용하여 가운데 원을 제외한 나머지 6개의 원을 색칠하는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
따라서 구하는 경우의 수는 $7\times 5!=840$

25. **[출제의도] 로그의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.**
$$\log x^3-\log\frac{1}{x^2}=3\log x-(-2\log x)=5\log x$$
$10lex<1000$에서
$1\le\log x<3$, $5\le 5\log x<15$
따라서 $5\log x$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 개수는 10
[보충 설명]
$5\log x$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 값을 구하면 $x=10,\ 10^{\frac{6}{5}},\ 10^{\frac{7}{5}},\ 10^{\frac{8}{5}},\ \cdots,\ 10^{\frac{14}{5}}$

26. **[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수의 극한값 구하는 문제를 해결한다.**
최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2, 0)$, $P(t, t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$는
$f(x)=(x+2)(x-t+1)$
그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(0, 2-2t)$
$\overline{AP}=\sqrt{\{t-(-2)\}^2+(t+2-0)^2}=|t+2|\sqrt{2}$,
$\overline{AQ}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{(2-2t)-0\}^2}=2\sqrt{t^2-2t+2}$
$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2}\times\overline{AP}-\overline{AQ})=\lim_{t\to\infty}(2|t+2|-2\sqrt{t^2-2t+2})$$
$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{|t+2|^2-(t^2-2t+2)}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$$
$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6t+2}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$$
$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6+\frac{2}{t}}{\left|1+\frac{2}{t}\right|+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}$$
$$=2\times\frac{6+0}{1+1}$$
$$=6$$

27. **[출제의도] 속도와 거리의 성질을 이용하여 거리 구하는 문제를 해결한다.**
점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로
$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$, $t=1$ 또는 $t=3$
$0\le t<1$에서 $v(t)>0$,
$1<t<3$에서 $v(t)<0$,
$t>3$에서 $v(t)>0$
이므로 점 P는 $t=1$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.
그러므로 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P가 $t=1$부터 $t=3$까지 이동한 거리의 2배이다.
따라서 구하는 값은
$$2\int_1^3|v(t)|\,dt=2\int_1^3(-3t^2+12t-9)dt$$
$$=2\Big[-t^3+6t^2-9t\Big]_1^3$$
$$=8$$
[다른 풀이]
점 P가 다시 A로 돌아올 때의 시각을 $t=a$(단, $a>1$)라 하면
$\int_1^a v(t)\,dt=0$이므로
$$\int_1^a v(t)\,dt=\int_1^a(3t^2-12t+9)dt$$

$= \left[t^3 - 6t^2 + 9t \right]_1^a$
$= a^3 - 6a^2 + 9a - 4$
$= (a-1)^2(a-4) = 0$

그러므로 $t = 4$ 일 때 점 P 가 다시 A 로 돌아온다.

따라서

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = -\int_1^3 v(t)\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$
$$= -\int_1^3 (3t^2 - 12t + 9)\,dt + \int_3^4 (3t^2 - 12t + 9)\,dt$$
$$= -\left[t^3 - 6t^2 + 9t \right]_1^3 + \left[t^3 - 6t^2 + 9t \right]_3^4$$
$$= 8$$

28. [출제의도] 도함수를 이용하여 부등식과 관련된 문제를 해결한다.

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x + k \le g(x)$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값의 범위를 구하여 보자.

(i) $f(x) \le 12x + k$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$h(x) = f(x) - 12x$ 라고 하면

$h(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x$,

$h'(x) = -4x^3 - 6x^2 - 2x - 12 = -2(x+2)(2x^2 - x + 3)$

$h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	20	↘

$h(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최대이고 최댓값은 20

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $k \ge 20$

(ii) $g(x) \ge 12x + k$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

부등식 $3x^2 - 12x + a - k \ge 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 12x + a - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 3 \times (a - k) \le 0$, $k \le a - 12$

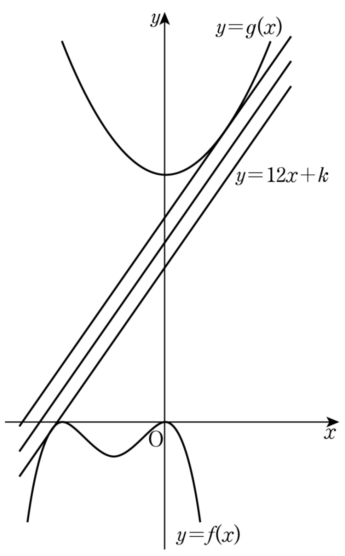
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $k \le a - 12$

(i), (ii)에 의해 $20 \le k \le a - 12$ 이고 이를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 3 이므로 $22 \le a - 12 < 23$

따라서 $34 \le a < 35$ 이므로 자연수 a 의 값은 34

[보충 설명]

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 12x + k$ 의 관계는 그림과 같다.



29. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이 구하는 문제를 해결한다.

$\angle BAD$ 와 $\angle BCD$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle BAD = \angle BCD = \theta$, $\overline{AD} = a$, $\overline{CB} = b$ 라 하면

삼각형 ABD 의 넓이 S_1 은

$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times 6 \times a \times \sin\theta = 3a\sin\theta$

삼각형 CBD 의 넓이 S_2 는

$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{CB} \times \overline{CD} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times b \times 4 \times \sin\theta = 2b\sin\theta$

$S_1 : S_2 = 9 : 5$ 이므로 $3a : 2b = 9 : 5$

$a : b = 6 : 5$ 이므로 $a = 6k$, $b = 5k\ (k > 0)$ 라고 하자.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2 = 6^2 + (5k)^2 - 2 \times 6 \times 5k \times \cos\alpha$ …… ㉠

$\angle ABC$ 와 $\angle ADC$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle ABC = \angle ADC = \alpha$

삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = (6k)^2 + 4^2 - 2 \times 6k \times 4 \times \cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2 + 9k - 20 = 0$, $(11k + 20)(k - 1) = 0$

$k > 0$ 이므로 $k = 1$ 이고 $a = 6k = 6$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

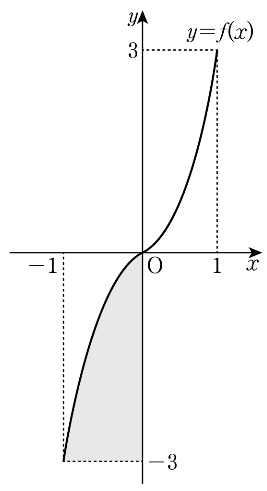
삼각형 ADC 의 넓이 S 는

$S = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$

따라서 $S^2 = (3\sqrt{7})^2 = 63$

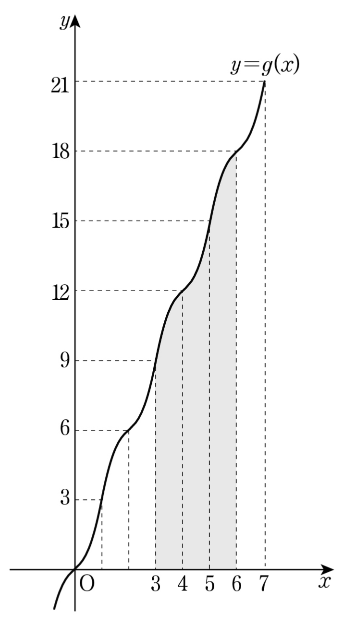
30. [출제의도] 평행이동을 이용하여 정의된 함수의 그래프를 추론하여 정적분의 값을 구한다.

문제에서 $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ 이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3 - 1 = 2$

닫힌구간 $[3, 6]$ 에서 $\int_3^6 g(x)\,dx = \int_3^6 |g(x)|\,dx$ 는 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 3$, $x = 6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로 12 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_3^5 g(x)\,dx = 2 \times 12 = 24$

닫힌구간 $[5, 7]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로 18 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_5^6 g(x)\,dx = 15 \times 1 + 2 = 17$

따라서 $\int_3^6 g(x)\,dx = \int_3^5 g(x)\,dx + \int_5^6 g(x)\,dx = 41$