# 2020학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## • 수학 영역 •

### 수학 '가'형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ④ | 2 | ① | 3 | ① | 4 | ③ | 5 | ② |
| 6 | ⑤ | 7 | ① | 8 | ④ | 9 | ④ | 10 | ④ |
| 11 | ⑤ | 12 | ① | 13 | ② | 14 | ⑤ | 15 | ③ |
| 16 | ② | 17 | ③ | 18 | ② | 19 | ③ | 20 | ② |
| 21 | ⑤ | 22 | 22 | 23 | 32 | 24 | 86 | 25 | 21 |
| 26 | 80 | 27 | 8 | 28 | 40 | 29 | 164 | 30 | 432 |

### 해 설

**1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산한다.**

$8^{\frac{4}{3}}\times 2^{-2}=(2^3)^{\frac{4}{3}}\times 2^{-2}=2^4\times 2^{-2}=2^{4-2}=2^2=4$

**2. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구한다.**

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하자.

$a_2=a+d=5$, $a_5=a+4d=11$

에서 $a=3$, $d=2$

따라서 $a_8=a+7d=3+7\times 2=17$

**3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.**

$\lim\limits_{n\to INF}\left(\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{4n^2-2n-1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n^2+2n+1)-(4n^2-2n-1)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=1$

**4. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미분계수의 값을 구한다.**

다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2\right\}$

$=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=2f'(2)$

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(2)=3\times 2^2-4\times 2=4$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\times 4=8$

**5. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해한다.**

$a_1=S_1=-1$

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=4n-5$

그러므로 $a_n=4n-5\ (n\ge 1)$

$a_n>100$에서

$4n-5>100$

$n>\dfrac{105}{4}=26.\cdots$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 27이다.

**6. [출제의도] 로그함수의 성질을 이해하여 로그가 포함된 부등식을 해결한다.**

진수 조건에 의해

$n^2-9n+18>0$, $(n-6)(n-3)>0$

$n<3$ 또는 $n>6$ …… ㉠

$\log_{18}(n^2-9n+18)<1$에서

$n^2-9n+18<18$이므로

$n^2-9n<0$, $n(n-9)<0$

$0<n<9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 $n$의 값의 범위는

$0<n<3$ 또는 $6<n<9$

이를 만족시키는 자연수는 1, 2, 7, 8이므로

구하는 모든 자연수 $n$의 값의 합은

$1+2+7+8=18$

**7. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

천의 자리의 수가 1인 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

천의 자리의 수가 2이고 백의 자리의 수가 0인 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$64+16=80$

**8. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.**

$x-1=t$라 하면 $x\to 0+$일 때, $t\to -1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x-1)=\lim\limits_{t\to -1+}f(t)=-1$

$f(x)=s$라 하면 $x\to 1+$일 때, $s\to -1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=\lim\limits_{s\to -1-}f(s)=2$

따라서

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x-1)+\lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=(-1)+2=1$

**9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.**

수열의 귀납적 정의에 따라 각 항을 구하면

$a_1=7$, $a_2=\dfrac{7+3}{2}=5$, $a_3=\dfrac{5+3}{2}=4$,

$a_4=4+3=7$, $a_5=\dfrac{7+3}{2}=5$, $a_6=\dfrac{5+3}{2}=4$,

$a_7=4+6=10$, $a_8=10+7=17$

**10. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 계산한다.**

$x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=-2x$의 그래프가 접하므로

$ax^2+2=-2x$, 즉 $ax^2+2x+2=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-2a=0$

$a=\dfrac{1}{2}$이므로 접점 A의 $x$좌표는 $-2$이다.

점 B는 점 A와 $y$축에 대하여 대칭이므로

접점 B의 $x$좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 $y$축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\displaystyle\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=2\times\left[\dfrac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2=2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

**11. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{8!}{2!\times 2!\times 4!}=420$

흰 공 2개를 하나로 보고 7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{2!\times 4!}=105$

따라서 구하는 경우의 수는 $420-105=315$

**12. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.**

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$x\ne 1$일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 연속이므로

함수 $h(x)$도 연속이다.

그러므로 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 1-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}$의 값이 존재하므로

$2+a+b=0$, 즉 $b=-a-2$

$\lim\limits_{x\to 1-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{2x^3+ax-a-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1-}(2x^2+2x+a+2)=a+6$

$\lim\limits_{x\to 1+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2x^3+ax-a-2}{2x+1}$

$=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{2x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to 1+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1-}h(x)=h(1)$이므로

$a+6=0$, 즉 $a=-6$

$b=-a-2$에서 $b=4$

따라서 $b-a=10$

**13. [출제의도] 등비수열의 성질을 이해하여 수열의 항을 구한다.**

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하자.

조건 (가)에서 $ar^2\times ar^4\times ar^6=125$

$(ar^4)^3=5^3$, 즉 $ar^4=5$

조건 (나)에서 $\dfrac{ar^3+ar^7}{ar^5}=\dfrac{13}{6}$, $\dfrac{1}{r^2}+r^2=\dfrac{13}{6}$

$r^2=X$로 치환하면 $X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{13}{6}$에서

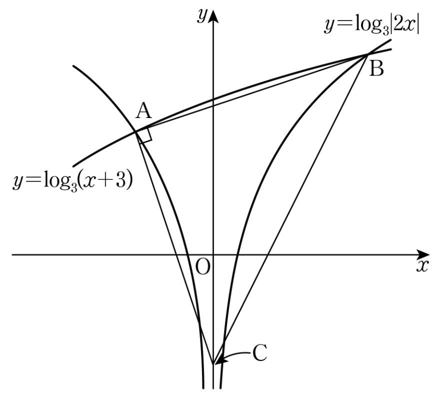
$6X^2-13X+6=0$, $(2X-3)(3X-2)=0$

$X=\dfrac{3}{2}$ 또는 $X=\dfrac{2}{3}$에서 $r^2=\dfrac{3}{2}$ 또는 $r^2=\dfrac{2}{3}$

공비가 1보다 커야 하므로 $r^2=\dfrac{3}{2}$

따라서 $a_9=ar^8=ar^4\times r^4=5\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{45}{4}$

**14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.**




$x<0$일 때의 교점 A의 $x$좌표는 방정식

$\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$의 근이므로

$-2x=x+3$, $3x=-3$, $x=-1$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(-1, \log_3 2)$

$x>0$일 때의 교점 B의 $x$좌표는 방정식
$\log_3 2x=\log_3(x+3)$의 근이므로
$2x=x+3,\ x=3$
따라서 점 B의 좌표는 B$(3, \log_3 6)$이다.
두 점 A$(-1, \log_3 2)$, B$(3, \log_3 6)$에 대하여
직선 AB의 기울기는
$\frac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\frac{\log_3 \frac{6}{2}}{4}=\frac{1}{4}$이므로
점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은
$y-\log_3 2=-4(x+1)$
$y=-4x-4+\log_3 2$ …… ㉠
직선 ㉠이 $y$축과 만나는 점 C의 좌표는
C$(0, -4+\log_3 2)$이다. 이때
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$
직각삼각형 ABC의 넓이를 $S$라 하면
$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\frac{17}{2}$

**15. [출제의도] 그래프를 이용하여 정적분과 거리의 관계를 추론한다.**

$\int_0^a|v(t)|dt=s_1,\ \int_a^b|v(t)|dt=s_2,$
$\int_b^c|v(t)|dt=s_3$이라 하자.
점 P는 출발한 후 시각 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 $-8=\int_0^a v(t)dt=-s_1$에서 $s_1=8$
점 P의 시각 $t=c$에서의 위치가 $-6$이므로
$-6=\int_0^c v(t)dt=(-8)+s_2-s_3$
에서 $s_2-s_3=2$ …… ㉠
$\int_0^b v(t)dt=\int_b^c v(t)dt$이므로
$-8+s_2=-s_3$, 즉 $s_2+s_3=8$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $s_2=5,\ s_3=3$
따라서 구하는 거리는 5이다.

**16. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수의 미정계수를 구한다.**

$a=\int_0^1|f(t)|dt$라 하면 $a>0$이고
$f(x)=x^3-4ax$
$f(1)=1-4a>0$에서 $a<\frac{1}{4}$
따라서 $0<a<\frac{1}{4}$이다.
$f(x)=x(x^2-4a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm2\sqrt{a}$
$0<x<2\sqrt{a}$일 때 $f(x)<0$이고 $x\ge2\sqrt{a}$일 때 $f(x)\ge0$이다.
$0<a<\frac{1}{4}$에서 $2\sqrt{a}<1$이므로
$a=\int_0^{2\sqrt{a}}\{-f(t)\}dt+\int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt$
$=\int_0^{2\sqrt{a}}(-t^3+4at)dt+\int_{2\sqrt{a}}^1(t^3-4at)dt$
$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$
$=8a^2-2a+\frac{1}{4}$
$8a^2-3a+\frac{1}{4}=0$에서
$32a^2-12a+1=0,\ (4a-1)(8a-1)=0$
$0<a<\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{8}$이고
$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$
이때 $f(2)=2^3-\frac{1}{2}\times2=7$

**17. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결한다.**

$f(x)=x(x-a)(x-6)$이라 하자.
$f(0)=0$이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 원점에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$이다.
원점이 아닌 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(t)=f'(t)(x-t)$
이고 이 직선이 원점을 지나므로
$0-f(t)=f'(t)(0-t)$
$tf'(t)-f(t)=0$ …… ㉠
$f(x)=x^3-(a+6)x^2+6ax$에서
$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$
이므로 ㉠에서
$t\{3t^2-2(a+6)t+6a\}-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=0$
$2t^3-(a+6)t^2=0,\ t^2\{2t-(a+6)\}=0$
$t\neq0$이므로 $t=\frac{a+6}{2}$이다.
$f'(0)=6a,\ f'\left(\frac{a+6}{2}\right)=-\frac{1}{4}(a^2-12a+36)$
이므로 $0<a<6$인 실수 $a$에 대하여 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면
$g(a)=-\frac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$
$g'(a)=-\frac{3}{2}(3a^2-24a+36)=-\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$
$0<a<6$이므로 $g'(a)=0$에서 $a=2$
$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | (0) | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(a)$ | | ↘ | $-48$ | ↗ | |

함수 $g(a)$는 $a=2$일 때 극소이면서 최소가 된다.
따라서 $0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 최솟값은
$g(2)=-48$이다.

**18. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 증명 과정을 추론한다.**

(ⅰ) $m>0$인 경우
$n$의 값에 관계없이 $m$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 $(m, n)$의 개수는 $\boxed{{}_{10}\mathrm{C}_2=45}$이다.
(ⅱ) $m<0$인 경우
$n$이 홀수이면 $m$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, $n$이 짝수이면 실수인 $m$의 $n$제곱근은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 $(m, n)$의 개수는
$\boxed{2+4+6+8=20}$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 $(m, n)$의 개수는
$\boxed{45}+\boxed{20}$이다.
따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 45, 20이고
$p+q=65$

**19. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.**

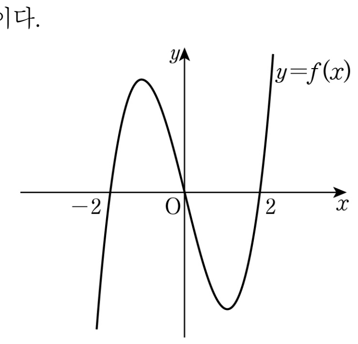
$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{10}$이므로 삼각형 OBC는 직각이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{2}$이다.
$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{AOC}=\beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 $S_1$, $S_2$는 각각
$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$
$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$
주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로
$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$
$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$
$\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$
따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$
코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{OA}})^2+(\overline{\mathrm{OB}})^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\alpha}$
$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$
$=4\sqrt{2}$

**20. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한 문제를 해결한다.**

직선 $l$이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 점 $(-1, 1)$을 지난다. 직선 $l$의 기울기를 $m$이라 하면 직선 $l$의 방정식은
$y=m(x+1)+1$, 즉 $y=mx+m+1$
직선 $l$과 $y$축이 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 D$(0, m+1)$
직선 $l$과 선분 AP가 만나는 점을 E라 하자.
직선 AP의 방정식이 $y=-\frac{2}{t}x+2$이므로
$mx+m+1=-\frac{2}{t}x+2$에서 $x=\frac{(1-m)t}{mt+2}$
그러므로 점 E의 $x$좌표는 $\frac{(1-m)t}{mt+2}$이다.
삼각형 ADE의 넓이가 삼각형 AOP의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로
$\frac{1}{2}\times(1-m)\times\frac{(1-m)t}{mt+2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times t\right)$
$t\neq0$이므로 $(1-m)^2=mt+2$
$m^2-(2+t)m-1=0$
$m=\frac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2-4\times(-1)}}{2}$
$=\frac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$
직선 $l$의 $y$절편이 $m+1$이고 $0<m+1<2$이므로
$f(t)=m+1=\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$
따라서 $\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$
$=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

**21. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분가능한 함수의 성질을 추론한다.**

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



ㄱ. $m=-1$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $h\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$ (참)

ㄴ. $m=-1$일 때, $g(x)=\begin{cases}47x-4 & (x<0)\\ -2x-4 & (x\ge 0)\end{cases}$

(i) $x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 $y$절편이 음수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 $x$좌표를 $x_1\,(x_1<0)$이라 하면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_1$에서만 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$일 때, $g(0)-4<0=f(0)$이므로 $x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(iii) $x>0$일 때,

$$f(x)-g(x)=2x^3-6x+4$$
$$=(x-1)^2(x+2)\ge 0$$

즉, $f(x)\ge g(x)$

$x>0$에서 $h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.

따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 $x$의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 양수 $m$에 대하여

$x=0$일 때, $g(0)=\frac{4}{m^3}>0=f(0)$이므로

$x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $f(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$x>0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 $y$절편도 양수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 $x$좌표를 $x_2\,(x_2>0)$이라 하면 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_2$에서만 미분가능하지 않다.

그러므로 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 $x$의 개수가 1이려면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능해야 한다.

$x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접한다고 할 때, 접점의 $x$좌표를 $t$라 하자.

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$에서

$2t^3-8t=-\frac{47}{m}t+\frac{4}{m^3}$ …… ㉠

$6t^2-8=-\frac{47}{m}$ …… ㉡

$t\times$㉡$-$㉠에서

$4t^3=-\frac{4}{m^3}$

$t=-\frac{1}{m}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{m^2}-8=-\frac{47}{m}$, $8m^2-47m-6=0$

$(8m+1)(m-6)=0$

$m$은 양수이므로 $m=6$

$m=6$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=-\frac{1}{6}$인 점에서 접한다.

(i) $m=6$일 때, 함수 $x<0$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(ii) $0<m<6$일 때, $x<0$에서 $m$의 값이 작아질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 커지고 $y$절편도 커지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

그러므로 $x<0$인 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.

따라서 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(iii) $m>6$일 때, $x<0$에서 $m$의 값이 커질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 작아지고 $y$절편도 작아지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점의 $x$좌표를 각각 $x_3$, $x_4$라고 하면 함수 $h(x)$는 $x=x_3$, $x=x_4$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 $x$의 개수가 1인 양수 $m$의 최댓값은 6이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**22. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.**

$$f'(x)=(2x+3)'\times(x^2+5)+(2x+3)\times(x^2+5)'$$
$$=2(x^2+5)+(2x+3)\times 2x$$
$$=6x^2+6x+10$$
$$f'(1)=6+6+10=22$$

**23. [출제의도] 호도법을 이용하여 부채꼴의 넓이를 계산한다.**

부채꼴의 반지름의 길이를 $r$, 호의 길이를 $l$이라 할 때, 중심각의 크기가 1라디안이므로 $\frac{l}{r}=1$ 즉, $l=r$

부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l=24$이므로

$l=r$를 대입하면 $3r=24$

$r=8$, $l=8$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$

**24. [출제의도] 정적분의 성질을 이해한다.**

$$\int_1^3(4x^3-6x+4)dx+\int_1^3(6x-1)dx$$
$$=\int_1^3(4x^3+3)dx=\Big[x^4+3x\Big]_1^3=86$$

**25. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.**

$$\lim_{n\to\infty}na_n(b_n+2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(na_nb_n+2n^2a_n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(n^2a_n\right)\times\left(\frac{b_n}{n}\right)+2n^2a_n\right\}$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}n^2a_n\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\right)+2\lim_{n\to\infty}n^2a_n$$
$$=3\times 5+2\times 3=21$$

**26. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이해한다.**

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 P가 제1사분면 위에 있고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(2\sqrt{2},\,1\right)$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(1,\,2\sqrt{2}\right)$

점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로 동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-1,\,-2\sqrt{2}\right)$

삼각함수의 정의에 의해

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma=\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)}{(-1)}=2\sqrt{2}$

따라서 $9\left(\sin^2\beta+\tan^2\gamma\right)=9\times\left(\frac{8}{9}+8\right)=80$

**27. [출제의도] 원순열을 이용하여 문제를 해결한다.**

회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 A, B, C 중에서 택할 수 있다.

| | | |
|---|---|---|
| A | B | |
| | C | |
| | | |

(i) A에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(ii) B에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(iii) C에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 어떤 정사각형에 칠해도 빨간색이 칠해진 정사각형과 꼭짓점을 공유하므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$(3+5)\times 7!=8\times 7!$

따라서 $k=8$

**28. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.**

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\,\frac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\frac{4}{7}$이므로

$-\frac{\pi}{a}<-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,0\right)$을 지나므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)+b=0$$
$$f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)+b=0$$

따라서 $\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)=-\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\frac{4}{7}$에서 $0<\frac{a}{2}\pi<\frac{2}{7}\pi$, $0<\frac{7a}{2}\pi<2\pi$

이므로

$\frac{7a}{2}\pi=2\pi-\frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a}{2}\pi=\pi+\frac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(i) $a=\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$에서

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b$$
$$=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b$$
$$=-\sqrt{2}+b=0$$

이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 $b$는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\dfrac{1}{3}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)+b$ 에서

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b$$
$$=-1+b=0$$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=0$ 이다.

(i), (ii)에서 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=1$ 이고

$$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$$

**29. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.**

직선 AB 의 방정식은

$$y=-\frac{n+5}{n+4}x+n+5$$

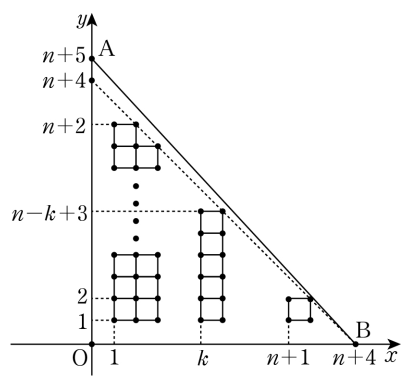
자연수 $a$에 대하여 $x=a$일 때

$$y=-\frac{n+5}{n+4}a+n+5$$
$$=n+5-\left(1+\frac{1}{n+4}\right)a$$
$$=n+5-a-\frac{a}{n+4}$$

$0<a<n+4$ 일 때, $0<\dfrac{a}{n+4}<1$ 이므로

$x=a$일 때, $y$좌표가 자연수인 점의 개수는

$n+4-a$ 이다.




두 자연수 $a$, $b$에 대하여 삼각형 AOB 의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각

$(a, b)$, $(a+1, b)$, $(a+1, b+1)$, $(a, b+1)$

이라 하면

$a=1$ 일 때, $1\le b\le n+1$ 이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$ 이다.

$a=2$ 일 때, $1\le b\le n$ 이므로 정사각형의 개수는 $n$ 이다.

$a=3$ 일 때, $1\le b\le n-1$ 이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$ 이다.

⋮

$a=n+1$ 일 때, $b=1$ 이므로 정사각형의 개수는 1 이다.

따라서

$$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(n^2+3n+2\right)$$

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}\left(n^2+3n+2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9\times17}{6}+3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8\right)$$
$$=164$$

**30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 문제를 해결한다.**

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4 인 삼차함수이므로

$g(x)=\displaystyle\int_t^x f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$ 는 미분가능하다.

$g(x)\ge g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x)<g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 은 $g(x)-g(a)\neq0$ 인 모든 $x$에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$ 를 만족시키는 $x$의 값을 $k$라 하면, $g(k)=g(a)$ 이므로

$$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

(i) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 같을 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)=0$ 일 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$에서 미분가능하다.

(iii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)\neq0$ 일 때,

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 $x$의 개수가 1 이므로

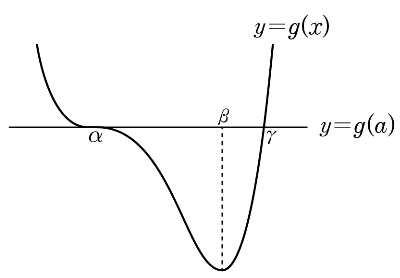
$g(x)-g(a)=0$, $g'(x)=f(x)\neq0$

인 $x$가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

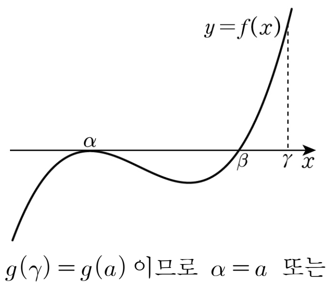
그러므로 사차함수 $y=g(x)$ 는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(a)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$ 인 방정식 $g(x)-g(a)=0$ 의 근을 $\alpha$, 함수 $g(x)$가 극솟값을 가질 때의 $x$의 값을 $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha<\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)




함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면




$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$ 이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$h(t)=g(a)=\displaystyle\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$ 에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$a=2$ 이면 $h(2)=\displaystyle\int_2^2 f(t)dt=0\neq27$

이므로 $a\neq2$

$\beta=2$ 이면

$h(3)=\displaystyle\int_3^a f(s)ds=0$ 이고,

$h(2)=\displaystyle\int_2^a f(s)ds=27$ 이므로

$h(2)-h(3)=\displaystyle\int_2^3 f(s)ds=27$ 이다.

$$\int_2^3 f(s)ds$$
$$=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$$
$$=\int_2^3 4\left\{s^3-2(a+1)s^2+\left(a^2+4a\right)s-2a^2\right\}ds$$
$$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2\left(a^2+4a\right)s^2-8a^2s\right]_2^3$$
$$=65-\frac{152}{3}(a+1)+10\left(a^2+4a\right)-8a^2$$
$$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$$

이므로

$3a^2-16a-19=0$

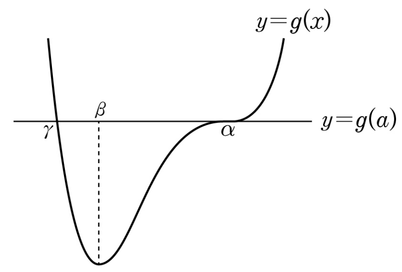
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\dfrac{19}{3}$

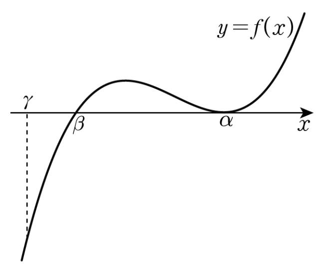
$a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)




함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면




(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq3$ 이면 $h(3)=\displaystyle\int_3^a f(s)ds\neq0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$h(2)=\displaystyle\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$f(5)=4\times 36\times 3=432$