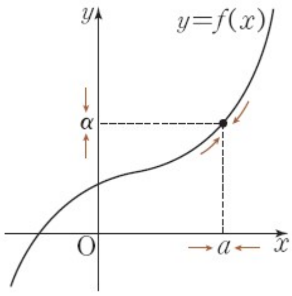
01 함수의 극한

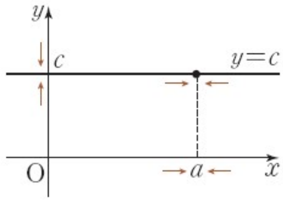
함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고, α를 $x \to a$일 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 한다. 이것을 기호로는 다음과 같이 나타낸다.



$$x \to a\text{일 때, } f(x) \to \alpha \text{ 또는 } \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

특히, 함수 $f(x) = c$ (c는 상수)일 때에는 임의의 실수 a에 대하여 다음이 성립한다.

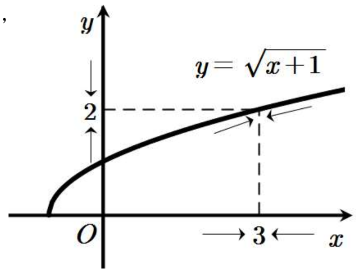


$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

$x \to 3$일 때 함수 $f(x) = \sqrt{x+1}$의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $x \to 3$일 때, $\sqrt{x+1} \to 2$이므로 극한은 2가 된다.

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 2$

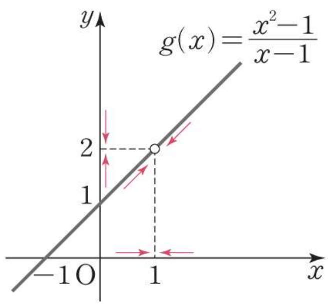


$x \to 1$일 때 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 극한을 구하시오.

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 분모가 0이 되어 함숫값이 정의되지 않는다. 하지만 $x \neq 1$이면

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다. $\therefore \lim_{x \to 1} g(x)=2$



$x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때의 함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

또한 x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

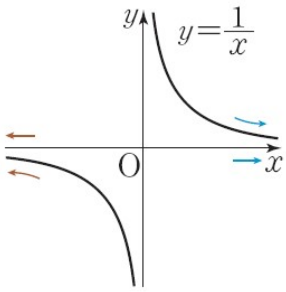
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$$

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$에 대하여 $x\to\infty$일 때와 $x\to-\infty$일 때의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 극한은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$



함수의 발산

양의 무한대로 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$x \to a\text{일 때, } f(x) \to \infty \text{ 또는 } \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

음의 무한대로 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$x \to a\text{일 때, } f(x) \to -\infty \text{ 또는 } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

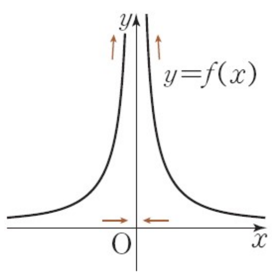
▷ $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$ 일 때 함수 $f(x)$의 값이 양의 무한대나 음의 무한대로 발산할 때에도 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$에 대하여 $x \to 0$일 때의 극한을 구하시오.

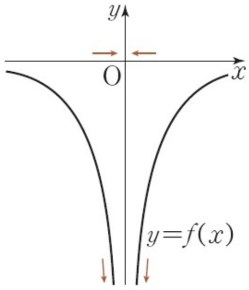
함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$의 그래프에서 $x \to 0$일 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다.

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



함수 $f(x)=-\frac{1}{x^2}$에 대하여 $x \to 0$일 때의 극한을 구하시오.

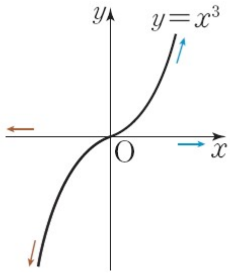
함수 $f(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 $x \to 0$일 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.



$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

함수 $f(x)=x^3$에 대하여 $x \to \infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 극한은 다음과 같음을 알 수 있다.



$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

함수의 좌극한과 우극한

1) 좌극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라고 하며 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \alpha$$

2) 우극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라고 하고 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \beta$$

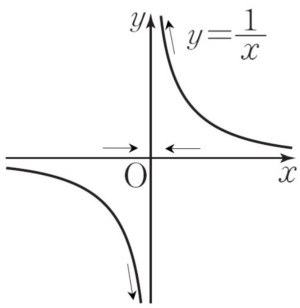
3) 함수의 극한, 좌극한, 우극한의 관계

함수 $f(x)$에 대하여 좌극한 $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$와 우극한 $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$가 모두 존재하고 그 값이 같은 경우에만 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{(극한값 존재)}$$

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$에 대하여 $x \to 0$일 때 극한의 존재 여부를 확인하시오.

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



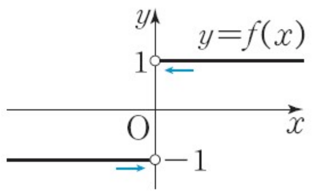
$x=0$에서의 우극한과 좌극한을 그래프를 통해 확인하면

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

이므로 우극한과 좌극한이 모두 존재하지 않기 때문에 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$는 $x=0$에서 극한이 존재하지 않는다.

함수 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$에 대하여 $x \rightarrow 0$일 때 극한의 존재 여부를 확인하시오.

함수 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$의 그래프는 오른쪽과 같다.



$x=0$에서 우극한과 좌극한을 그래프를 통해 확인하면

$$\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{x}{|x|}=1,\quad \lim_{x\rightarrow 0-}\frac{x}{|x|}=-1$$

이므로 우극한과 좌극한이 모두 존재하지만 서로 같지 않기 때문에 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극한이 존재하지 않는다.

02 함수의 극한의 성질

함수의 극한의 성질

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 상수)일 때

1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (k는 상수)

2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\pm\beta$ (복부호동순)

3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\beta\neq 0$)

▷ 함수의 극한의 성질에 대한 증명은 고등학교 수학 범위를 벗어나므로 생략한다.
▷ 함수의 그래프를 그리지 않고도 극한값을 구할 수 있다.

함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} 1=\left(\lim_{x\to 2} x\right)\times\left(\lim_{x\to 2} x\right)+\lim_{x\to 2} 1$$

$$=2\times 2+1=5$$

함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-2}{5x+3}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-2}{5x+3}=\frac{\lim_{x\to 0}(x^2+x-2)}{\lim_{x\to 0}(5x+3)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}2}{5\times\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}3}$$

$$=\frac{0+0-2}{0+3}=-\frac{2}{3}$$

함수의 극한값의 계산

1) $\frac{0}{0}$꼴의 극한값

① 유리함수의 경우

분모, 분자를 인수분해하고 약분한다.

② 무리함수의 경우

분모 또는 분자 중 근호($\sqrt{\quad}$)가 있는 쪽을 유리화한 후 약분한다.

2) $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값

분모, 분자를 각각 분모의 최고차항으로 나눈다.

3) $\infty-\infty$꼴의 극한값

근호가 없는 다항식은 최고차항으로 묶고, 근호가 있을 때는 유리화한다.

4) $\infty\times 0$ 꼴의 극한값

통분 또는 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$(c는 유한확정값)으로 변형하여 극한값을 구한다.

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x(x+1)}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}(x+1)=\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1=0+1=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right)=\frac{1}{4}$

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1}$ (2) $\lim_{x \to \infty} \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} - 3}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} = \frac{-3}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}$

다음 극한을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} (3x^2 - x)$ (2) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)$

(1) $\lim_{x \to \infty} (3x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} \left\{x^2\left(3 - \frac{1}{x}\right)\right\} = \infty$

(2) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 4x} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4}{2} = 2$

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-1\right\}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-1\right\}=\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left\{\frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}\right\}=\lim_{x \to 0} \frac{-x-2}{(x+1)^2}=-2$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}\right)\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

미정계수의 결정

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$인 상수)이면

$f(x)$의 최고차항의 차수 = $g(x)$의 최고차항의 차수

α = $f(x)$, $g(x)$ 최고차항의 계수의 비

2) $\dfrac{0}{0}$의 꼴

① $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 상수)일 때, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이다.

② $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$인 상수)일 때, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이다.

▷ $f(x)$가 x에 대한 다항식이고 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2+1} = 2$라는 사실로부터 다항식 $f(x)$가 x에 대한 이차식이고, 이차항의 계수가 2라는 것을 알 수 있다.

▷ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 상수)이고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \times 0 = 0$$

▷ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$인 상수)이고 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$$

두 실수 a, b 가 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$를 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$ 이고 $\lim_{x \to 2}(x-2) = 0$이므로 $\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b) = 0$이어야 한다.

$$\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b) = 4+2a+b = 0 \qquad \therefore\ b = -2a-4$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)+a(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2+a) = 4+a = 5$$

$\therefore\ a = 1,\ b = -6$

$\therefore\ a+b = -5$

두 실수 a, b 가 $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} = 6$을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} = 6$ 이고 $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$이므로 $\lim_{x \to 1}(\sqrt{x+a}-b) = 0$이어야 한다.

$$\lim_{x \to 1}(\sqrt{x+a}-b) = \sqrt{1+a}-b = 0 \qquad \therefore\ b = \sqrt{a+1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} = \lim_{x \to 1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} \cdot \frac{\sqrt{x+a}+b}{\sqrt{x+a}+b}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1})}{x+a-(\sqrt{a+1})^2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1}) = 2\sqrt{a+1} = 6$$

$\therefore\ a = 8,\ b = 3$

$\therefore\ a+b = 11$

다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$ 으로부터 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$임을 알 수 있다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$이고 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로 $\lim_{x\to 0}(x^3+x^2+ax+b)=0$이어야 한다.

$\therefore\ b=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+x+a)}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+x+a)=a=2$

$\therefore\ f(x)=x^3+x^2+2x$

$\therefore\ f(1)=1+1+2=4$

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ (α, β는 상수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.
2) $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

▷ 증명은 고등학교 수학 범위를 벗어나므로 생략한다.
▷ $f(x) < g(x)$이더라도 $\alpha = \beta$인 경우가 있다.

예를 들어, $x > 0$일 때 $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$이지만 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$이다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족할 때, $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값을 구하시오.

$$2x-2 \le f(x) \le x^2-2x+2$$

$\lim_{x\to 2}(2x-2) = 2$, $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+2) = 2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 구하시오.

$$3-\frac{1}{x} < f(x) < 3+\frac{1}{x} \quad (x>0)$$

$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3$, $\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right) = 3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$의 값을 구하시오.

모든 실수 x에 대하여 $-1 \le \cos x \le 1$이므로

$-\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x}$ ($\because x \to \infty$ 일 때 $x > 0$)

이때, $\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x} = 0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

01 연속함수

구간

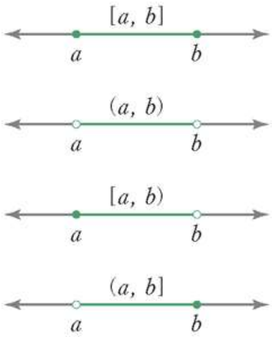
두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 다음 실수의 집합

$$\{x\,|\,a \le x \le b\},\ \{x\,|\,a < x < b\},$$
$$\{x\,|\,a \le x < b\},\ \{x\,|\,a < x \le b\}$$

를 각각 구간이라 하며, 이들을 차례로 기호

$$[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]$$

로 나타낸다. 이때 $[a,\ b]$를 닫힌구간, $(a,\ b)$를 열린구간이라 하고, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 각각 반열린 구간 또는 반닫힌 구간이라고 한다.



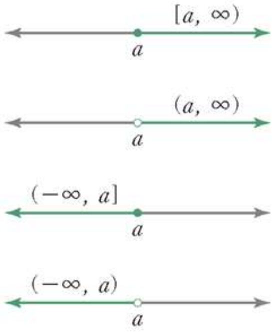
또 실수의 집합

$\{x\,|\,x \ge a\}$, $\{x\,|\,x > a\}$, $\{x\,|\,x \le a\}$, $\{x\,|\,x < a\}$

도 각각 구간이라고 하며, 이들을 차례로 기호

$[a,\ \infty)$, $(a,\ \infty)$, $(-\infty,\ a]$ $(-\infty,\ a)$

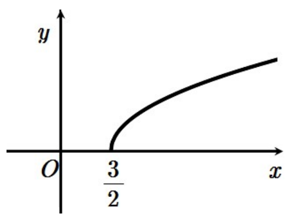
로 나타낸다. 특히 실수 전체의 집합도 하나의 구간이며, 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.



함수 $f(x)=\sqrt{2x-3}$의 정의역과 치역을 구간으로 나타내시오.

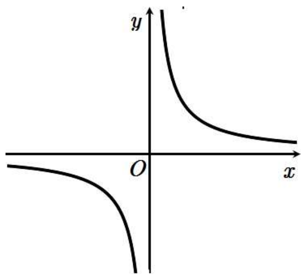
정의역 : $\left[\frac{3}{2},\ \infty\right)$,

치역 : $[0,\ \infty)$



함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 정의역과 치역을 구간으로 나타내시오.

정의역 : $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$,
치역 : $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$



함수의 연속과 불연속

1) $x=a$에서 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① $x=a$에서 함수 $f(x)$가 정의되어 있다. ⇨ $f(a)$의 값이 존재한다.

② 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. ⇨ $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$

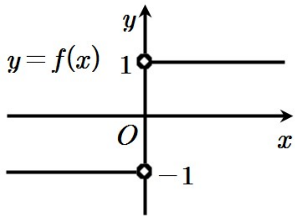
③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) $x=a$에서 불연속

함수 $f(x)$가 위의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

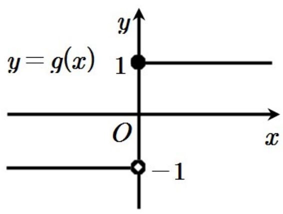
함수 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$의 $x=0$에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $x=0$에서 함숫값이 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



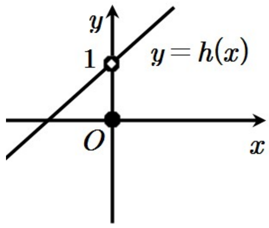
함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$ 의 $x=0$에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $g(0)=1$이지만 $\lim_{x \to 0-} g(x)=-1$, $\lim_{x \to 0+} g(x)=1$로 좌극한과 우극한이 같지 않기 때문에 $x=0$에서의 극한값이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



함수 $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 의 $x=0$에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $h(0)=0$으로 $x=0$에서 함숫값이 존재하고, $\lim_{x \to 0-} h(x)=\lim_{x \to 0+} h(x)=1$로 $x=0$에서의 극한값 $\lim_{x \to 0} h(x)$가 존재하지만 $h(0) \neq \lim_{x \to 0} h(x)$이기 때문에 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



연속함수

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 열린구간에서 연속이라고 한다. 또 어떤 열린구간에서 연속인 함수를 그 열린구간에서의 연속함수라고 한다.

한편, 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이고

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a),\quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하며, $f(x)$를 그 닫힌구간에서의 연속함수라고 한다.

▷ 함수 $f(x) = x$는 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

▷ 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$는 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

▷ 함수 $f(x) = \sqrt{x}$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이고, $\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0)$이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$ 가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 되려면 일단 $x = 2$에서 연속이 되어야 한다. $\therefore\ \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - a}{x - 2} = b$

$\lim_{x \to 2}(x-2) = 0$이므로 $\lim_{x \to 2}(x^2 - a) = 0$이어야 한다.

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - a) = 4 - a = 0 \qquad \therefore\ a = 4$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4 = b \qquad \therefore\ b = 4$$

02 연속함수의 성질

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, 다음 각 함수도 $x=a$에서 연속이다.

1) $kf(x)$ (k는 상수)
2) $f(x)\pm g(x)$
3) $f(x)g(x)$
4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

▷ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

이때 함수의 극한의 성질을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

1) $\lim\limits_{x\to a}\{kf(x)\}=k\times\lim\limits_{x\to a}f(x)=kf(a)$

2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)\pm g(a)$ (복부호동순)

3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)\times\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

▷ 일차함수 $y=x$는 실수 전체에서 연속이므로 이 함수의 곱으로 나타나는 함수

$$y=x^2,\quad y=x^3,\quad y=x^4,\quad \cdots$$

은 모두 실수 전체에서 연속이다. 또한 다항함수는 위 함수들의 실수배와 상수함수의 합이므로 역시 실수 전체에서 연속이다.

▷ 유리함수는 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 형태로 나타나므로 $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

삼차함수 $y=x^3+2x^2+3x+4$가 모든 실수에서 연속임을 보이시오.

연속함수의 기본 성질을 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다.

- 상수함수 $y=4$과 일차함수 $y=x$는 모든 실수에서 연속임을 알 수 있다.
- 3)에 의하여 $y=x^n$ (n은 자연수) 역시 모든 실수에서 연속이다.
- 1)에 의하여 $y=k \cdot x^n$ (n은 자연수)도 모든 실수에서 연속이다.
- 2)에 의하여 다항함수가 모든 실수에서 연속이 됨을 알 수 있다.

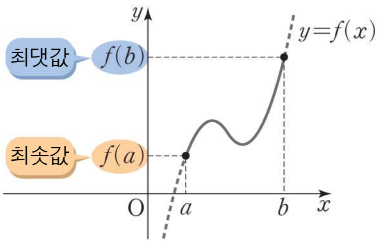
두 함수 $f(x)=x-2,\ g(x)=x^2-4x+3$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 연속인 구간을 조사하시오.

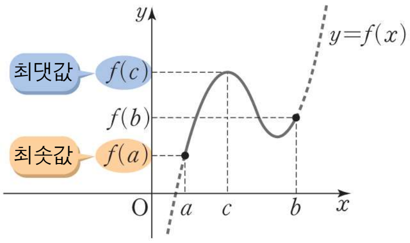
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

이때 연속함수의 성질에 의하여 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq1,\ x\neq3$인 모든 실수에서 연속이다. 따라서 $(-\infty,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ \infty)$에서 연속이다.

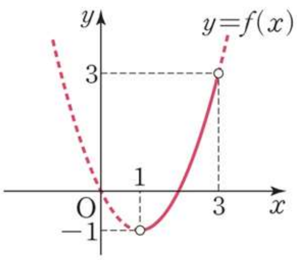
최대 · 최소 정리

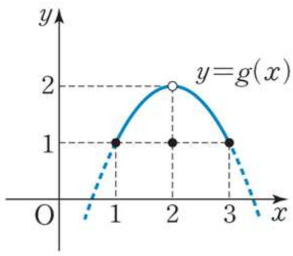
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.





▷ 닫힌구간이 아니거나 혹은 연속이 아닌 경우는 아래 그림과 같이 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않는다.

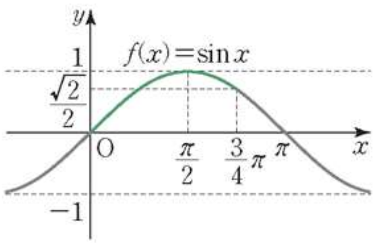




함수 $f(x)=\sin x$는 다음 구간에서 최대 · 최소 정리를 적용할 수 있는지 설명하고, 적용할 수 있다면 그 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $\left[0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right]$ (2) $\left(0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

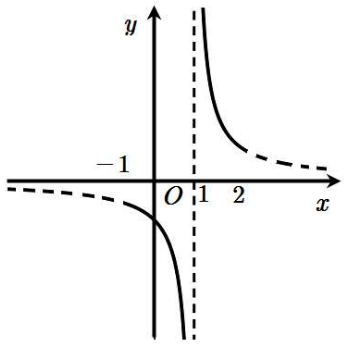
(1) 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right]$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 최대 · 최소의 정리를 적용할 수 있고, 오른쪽 그래프에서 보듯이 최댓값 1과 최솟값 0을 갖는다.



(2) 열린구간 $\left(0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$에서는 최대 · 최소의 정리를 적용할 수 없다. 그래프에서 보듯이 최댓값 1만 갖는다.

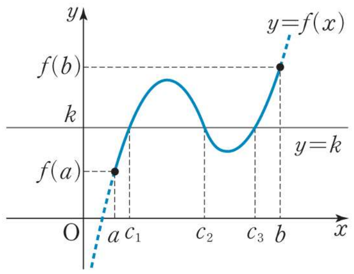
함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$가 구간 $[-1,\ 2]$에서 최댓값 혹은 최솟값을 갖는지 조사하시오.

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$는 오른쪽 그래프에서 보듯이 $x=1$에서 불연속이므로 최대·최소 정리를 적용할 수 없다. 따라서 닫힌구간 $[-1,\ 2]$이라고 할지라도 최댓값과 최솟값이 존재하지 않는다.

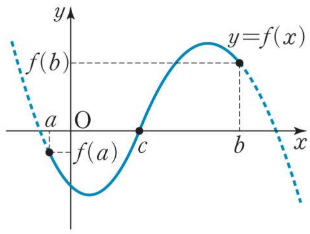


사잇값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



▷ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 0이 있으므로 $f(c)=0$을 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$이 a와 b사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



▷ 사잇값 정리를 통하여 방정식의 실근의 존재 여부만을 판단할 수 있을 뿐, 근이 몇 개인지 혹은 근이 무엇인지를 알아낼 수 없다.

삼차방정식 $x^3-5x^2+2x+5=0$의 실근이 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$f(x)=x^3-5x^2+2x+5$라고 하면 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이다. 따라서 $f(x)$는 $[1,\ 2]$에서도 연속이고, $f(1)=3,\ f(2)=-3$이므로 사잇값 정리에 의하여 구간 $(1,\ 2)$사이에 $f(c)=0$을 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x+\log x-2$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

① $y=x,\ y=\log x,\ y=2$가 모두 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이므로 $f(x)$도 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이다.

② $f(1)=1+\log 1-2=-1$,

$f(3)=3+\log 3-2=1+\log 3$ 이므로

$f(1)\cdot f(3)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.