# 01 확률의 뜻

## 시행과 사건

1) 시행 : 동일한 조건에서 반복이 가능하고 그 결과가 우연에 의하여 지배되는 실험이나 관찰을 시행이라 한다.
2) 표본공간 : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 한다.
3) 사건 : 표본공간의 부분집합을 사건이라 한다.
4) 근원사건 : 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라 한다.

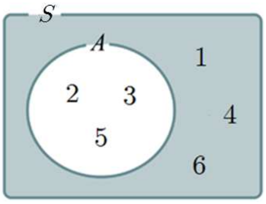
▷ 한 개의 주사위를 던지는 것은 동일한 조건에서 반복이 가능하고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지므로 시행이라고 할 수 있다.
이때 표본공간을 $S$라고 하면

$$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

이고, 이 시행의 근원 사건은

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

이다. 또 소수의 눈이 나오는 사건을 $A$라고 하면 $A = \{2,\ 3,\ 5\}$이다.




## 배반사건과 여사건

표본공간 $S$의 두 사건 $A$, $B$에 대하여

1) 사건 $A$와 사건 $B$가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

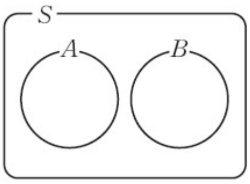
$$A \cap B = \varnothing$$

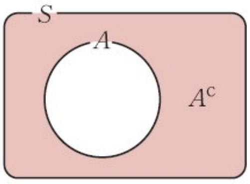
일 때, $A$와 $B$를 서로 배반사건이라고 한다.

2) 사건 $A$에 대해서 $A$가 일어나지 않는 사건을 사건 $A$의 여사건이라고 하고

$$A^C$$

로 나타낸다.




▷ $A$와 $B$의 합사건 : $A$ 또는 $B$가 일어나는 사건으로 $A \cup B$로 나타낸다.
▷ $A$와 $B$의 곱사건 : $A$와 $B$가 동시에 일어나는 사건으로 $A \cap B$로 나타낸다.
▷ $A \cap A^C = \varnothing$이므로 $A$와 $A^C$는 서로 배반사건이다.

1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 수가 8의 약수인 사건을 $A$, 12의 약수인 사건을 $B$라고 하자. 다음을 구하시오.

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $A^{C}$

(4) $A^{C} \cup B^{C}$

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이므로

(1) $A \cap B = \{1,\ 2,\ 4\}$

(2) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}$

(3) $A^{C} = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$

(4) $A^{C} \cup B^{C} = (A \cap B)^{C} = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 2의 배수의 눈이 나오는 사건을 $A$, 5의 약수의 눈이 나오는 사건을 $B$, 소수의 눈이 나오는 사건을 $C$라고 하자. 다음을 구하시오.

(1) 사건 $C$의 여사건

(2) 사건 $A$, $B$, $C$ 중에서 서로 배반인 두 사건

$A = \{2,\ 4,\ 6\}$, $B = \{1,\ 5\}$, $C = \{2,\ 3,\ 5\}$이므로

(1) $C^{C} = \{1,\ 4,\ 6\}$

(2) $A \cap B = \varnothing$ 이므로 사건 $A$와 사건 $B$가 서로 배반사건이다.

## 수학적 확률

어떤 시행에서 표본공간 $S$에 속하는 근원사건의 수가 $n(S)$이고 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 사건 $A$에 속하는 근원사건의 수를 $n(A)$라고 하면 사건 $A$가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건}A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

와 같이 정의하고, 이것을 수학적 확률이라고 한다.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 눈의 수의 합이 7이 될 확률을 구하시오.

일어날 수 있는 모든 경우인 표본공간 $S$는

$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

곱의 법칙에 의하여

$n(S)=6\times6=36$

이때, 눈의 수의 합이 7인 사건을 $A$라고 하면

$A=\{(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)\}$

$n(A)=6$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

빨간 공 4개와 파란공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공 1개와 파란공 2개가 나올 확률을 구하시오.

표본공간을 $S$라 하면 $n(S)={}_7\mathrm{C}_3=35$

빨간 공 4개에서 1개를 꺼내고, 파란 공 3개에서 2개를 꺼내는 사건을 $A$라고 하면

$n(A)={}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2=12$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{12}{35}$$

## 통계적 확률

일반적으로 어떤 시행을 $n$번 반복할 때 사건 $A$가 일어난 횟수를 $r_n$라 하면 $n$이 매우 커질수록 사건 $A$가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 일정한 값 $p$에 가까워진다. 이때 $p$를 사건 $A$가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{n} = p$$

▷ 표본공간의 근원사건들이 일어날 가능성이 모두 같다고 기대할 수 없을 때, 각 근원사건이 일어날 확률을 통계적 확률로 구하게 된다. 예를 들어, 윷의 등과 배가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이라고 할 수 없다. 즉, 각 근원사건이 일어날 확률이 같다고 볼 수 없다. 이 경우 윷가락을 $n$번 던져서 그 중 배가 나온 회수를 $r_n$을 세어 다음과 같이 등이 나올 사건 $A$와 배가 나올 사건 $B$에 대한 확률을 계산한다.

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{n}, \qquad \mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

보통의 경우 시행회수 $n$이 충분히 크면 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각해도 무방하다.

▷ 어떤 사건 $A$가 일어날 수학적 확률이 $p$일 때, 시행 횟수 $n$을 충분히 크게 하면 사건 $A$가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 $p$에 가까워 진다는 것이 알려져 있다.

어떤 야구 선수가 $1000$번의 타석에서 $270$개의 안타를 쳤을 때, 이 타자가 타석에서 안타를 칠 확률을 구하시오.

통계적 확률은 $\frac{270}{1000} = \frac{27}{100}$이다.

## 확률의 기본 성질

표본공간 $S$의 임의의 사건 $A$에 대하여

1) $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$
2) $\mathrm{P}(S) = 1$
3) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$

▷ 사건 $A$는 표본공간 $S$의 부분집합이므로 $0 \le n(A) \le n(S)$가 성립하고, 이 부등식의 양변을 $n(S)$로 나누면 $0 \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le 1$, 즉 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$이 성립한다.

▷ $\mathrm{P}(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$ ⇦ 반드시 일어나는 사건 (전사건)

▷ $\mathrm{P}(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(S)} = 0$ ⇦ 절대로 일어나지 않는 사건 (공사건)

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하시오.

(1) 눈의 수의 합이 $1$이 될 확률
(2) 눈의 수의 곱이 $40$ 이하일 확률

(1) 공사건 이므로 확률은 $0$이다.
(2) 전사건 이므로 확률은 $1$이다.

# 02 확률의 덧셈정리

## 확률의 덧셈정리

1) 표본공간 $S$의 두 사건 $A$, $B$에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

2) 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

▷ 두 사건 $A$, $B$에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이므로 두 사건 $A$ 또는 $B$가 일어날 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}\\&=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

특히, 사건 $A$와 사건 $B$가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 사건을 $A$, 6의 약수가 나오는 사건을 $B$라고 하자. $A$ 또는 $B$가 일어날 확률을 구하시오.

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A\cap B=\{2,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 눈의 합이 5가 되는 사건을 $A$, 눈의 합이 7이 되는 사건을 $B$라고 하자. $A$ 또는 $B$가 일어날 확률을 구하시오.

$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$,
$B=\{(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)\}$
$A\cap B=\varnothing$ 이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}+\frac{6}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

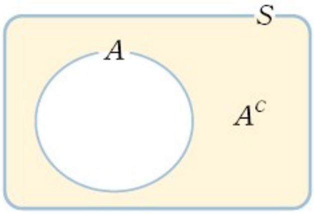
## 여사건의 확률

사건 $A$의 여사건 $A^C$의 확률은

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

▷ $A \cap A^C = \varnothing$ 이므로 두 사건 $A$, $A^C$은 서로 배반사건이다.
따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$




그런데 $A \cup A^C$은 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과인 표본공간과 같으므로 $P(A \cup A^C) = 1$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 서로 다른 눈이 나올 확률을 구하시오.

서로 같은 눈이 나오는 사건을 $A$라고 하면 구하는 확률은 $P(A^C)$와 같다.

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

3개의 당첨 제비가 포함된 10개의 제비 중에서 임의로 두 개의 제비를 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률을 구하시오.

적어도 한 개의 당첨제비를 뽑는 사건을 $A$라고 하면, 여사건 $A^C$는 당첨 제비를 한 개도 뽑지 못하는 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

# 01 조건부확률과 확률의 곱셈정리

**조건부확률**

사건 $A$, $B$가 표본공간 $S$의 두 부분집합이라 할 때, 사건 $A$가 일어났다는 조건 하에, 사건 $B$가 일어날 확률을 사건 $A$가 일어났을 때의 사건 $B$의 조건부확률이라고 하며, 이것을 기호로 $\mathrm{P}(B \mid A)$로 표시한다. 이때 조건부확률 $\mathrm{P}(B \mid A)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

▷ 표본공간 $S$에서 사건 $A$가 일어났을 때의 사건 $B$의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

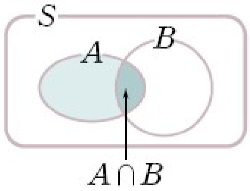
이다. 그런데

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

가 성립한다.




한 학급 30명의 학생 중 여학생이 20명, 안경을 착용한 학생이 17명, 안경을 착용하지 않은 남학생이 5명이라고 한다. 이 중 한 명을 선택했더니 남학생이었다. 이 학생이 안경을 착용하고 있을 확률을 구하시오.

오른쪽 표로부터 조건부확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

| | 안경 | 눈 | 계 |
|---|---|---|---|
| 남자 | 5 | 5 | 10 |
| 여자 | 12 | 8 | 20 |
| 계 | 17 | 13 | 30 |

$$\mathrm{P}(\text{안경}|\text{남학생})=\frac{\mathrm{P}(\text{안경}\cap\text{남학생})}{\mathrm{P}(\text{남학생})}$$

$$=\frac{\frac{5}{30}}{\frac{10}{30}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

## 확률의 곱셈정리

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 $A$와 $B$가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)\times\mathrm{P}(A\mid B)$$

▷ 조건부확률에 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B\mid A)$$

마찬가지로 조건부확률 $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\times\mathrm{P}(A\mid B)$$

주머니 안에 빨간 공이 6개, 파란 공이 4개 들어 있다. 이 주머니 안에서 차례로 2개의 공을 꺼낼 때, 2개 모두 빨간 공일 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

첫 번째 꺼낸 공이 빨간 공인 사건을 $A$, 두 번째 꺼낸 공이 빨간 공인 사건을 $B$라고 하자.

첫 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

첫 번째 꺼낸 공이 빨간 공일 때, 두 번째 꺼낸 공도 빨간 공을 확률은

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

빨간 공 4개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 정국이가 임의로 하나의 공을 꺼낸 후, 지민이가 남아 있는 공 중에서 임의로 하나의 공을 꺼냈다. 지민이가 꺼낸 공이 빨간 공이었을 때, 정국이가 꺼낸 공도 빨간 공이었을 확률을 구하시오.

정국이가 빨간 공을 꺼낸 사건을 $A$, 지민이가 빨간 공을 꺼낸 사건을 $B$라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}\left(A^{\mathrm{C}}\cap B\right)\\ &= (\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B\mid A))+\left(\mathrm{P}\left(A^{\mathrm{C}}\right)\times\mathrm{P}\left(B\mid A^{\mathrm{C}}\right)\right)\\ &= \left(\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

# 02 사건의 독립과 종속

## 사건의 독립과 종속

두 사건 $A$, $B$에 대하여 어느 한 사건이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 끼치지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B \mid A^C) = \mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \mid B^C) = \mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 $A$, $B$를 서로 독립이라고 한다.
두 사건이 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 종속이라고 한다.

## 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$

▷ 두 사건 $A$, $B$가 독립이면 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$

이 성립한다.

▷ 역으로 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$이고 $\mathrm{P}(A) > 0$이면

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B)$$

이 성립하므로 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

한 개의 주사위를 던져 짝수의 눈이 나오는 사건을 $A$, $4$이상의 눈이 나오는 사건을 $B$, $6$의 약수의 눈이 나오는 사건을 $C$라고 할 때, 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 조사하시오.

(1) 두 사건 $A$, $B$

(2) 두 사건 $A$, $C$

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\dfrac{2}{3}$

(1) $A\cap B=\{4,\ 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

또 $\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

(2) $A\cap C=\{2,\ 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{3}$

또 $\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 $A$, $C$는 서로 독립이다.

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립일 때, 다음 두 사건도 서로 독립임을 보이시오.
(단, $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$)

(1) 사건 $A$, $B^{\mathrm{C}}$ (2) 사건 $A^{\mathrm{C}}$, $B^{\mathrm{C}}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$

(1) $\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}\cap B)=\mathrm{P}(B-A)$

$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(B)(1-\mathrm{P}(A))$

$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})$

(2) $\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}\cap B^{\mathrm{C}})=\mathrm{P}((A\cup B)^{\mathrm{C}})$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=(1-\mathrm{P}(A))(1-\mathrm{P}(B))$

$=\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})\mathrm{P}(B^{\mathrm{C}})$

## 독립시행

어떤 시행을 반복하는 경우 매 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

## 독립시행의 확률

매회 사건 $A$가 일어날 확률이 $p$, 사건 $A$가 일어나지 않을 확률이 $(1-p)$로 일정할 때, $n$회의 독립시행 중 $A$가 $r$번 일어날 확률 $\mathrm{P}_r$은

$$\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r\, p^r (1-p)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

▷ 독립시행의 확률은 $i$번째에 사건 $A$가 일어나는 경우와 그렇지 않은 경우만을 생각하면 된다. $i$번째 시행에서 사건 $A$가 일어난 것을 ○, 일어나지 않은 것을 X로 나타낼 때, $n$번의 시행 중 사건 $A$가 $r$번 일어났다고 하면 생각할 수 있는 모든 경우의 수는 $r$개의 ○와 $n-r$개의 X를 나열하는 경우의 수 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r$과 같다. 또한 각 시행이 모두 독립이므로 사건 $A$가 일어날 확률 $p$를 $r$번 곱해주고 사건 $A$가 일어나지 않을 확률 $(1-p)$를 $n-r$번 곱해주면 된다. 따라서 $\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r\, p^r (1-p)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 이 성립한다.

주사위를 6번 던졌을 때, 1 또는 2의 눈이 2번 나올 확률을 구하시오.

주사위를 던져서 1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 15\times\frac{1}{9}\times\frac{16}{81} = \frac{80}{243}$$

어떤 사격 선수가 $10$점 과녁을 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$이라고 한다. 이 선수가 $4$발을 쏘았을 때, $3$발 이상 $10$점 과녁에 맞힐 확률을 구하시오.

$3$발을 $10$점 과녁에 맞힐 확률은 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$

$4$발을 $10$점 과녁에 맞힐 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{256}$

따라서 $3$발 이상 $10$점 과녁에 맞힐 확률은 $\frac{27}{64}+\frac{81}{256}=\frac{108+81}{256}=\frac{189}{256}$