모의 논술고사 문제 해설 및 예시답안(자연계열)

▢ 문제 1

1. 출제 의도

【문제 1-1】
주어진 퍼즐의 조건과 목표를 이해하는가?
간단한 경우에 대한 퍼즐의 목표를 해결할 수 있는가?

【문제 1-2】
수열의 귀납적 정의를 이해하는가?
수열의 귀납적 정의로부터 주어진 항을 구할 수 있는가?

【문제 1-3】
H_n의 정의를 이해하는가?
주어진 상황으로부터 수열의 귀납적 정의와 관련된 부등식을 이끌어내는가?

2. 문제 해설

주어진 규칙과 목표를 가진 퍼즐에 대한 이해력을 묻고, 퍼즐과 관련된 값을 수열의 귀납적 정의를 이용하여 구할 수 있는 지를 묻는다.

3. 채점 기준

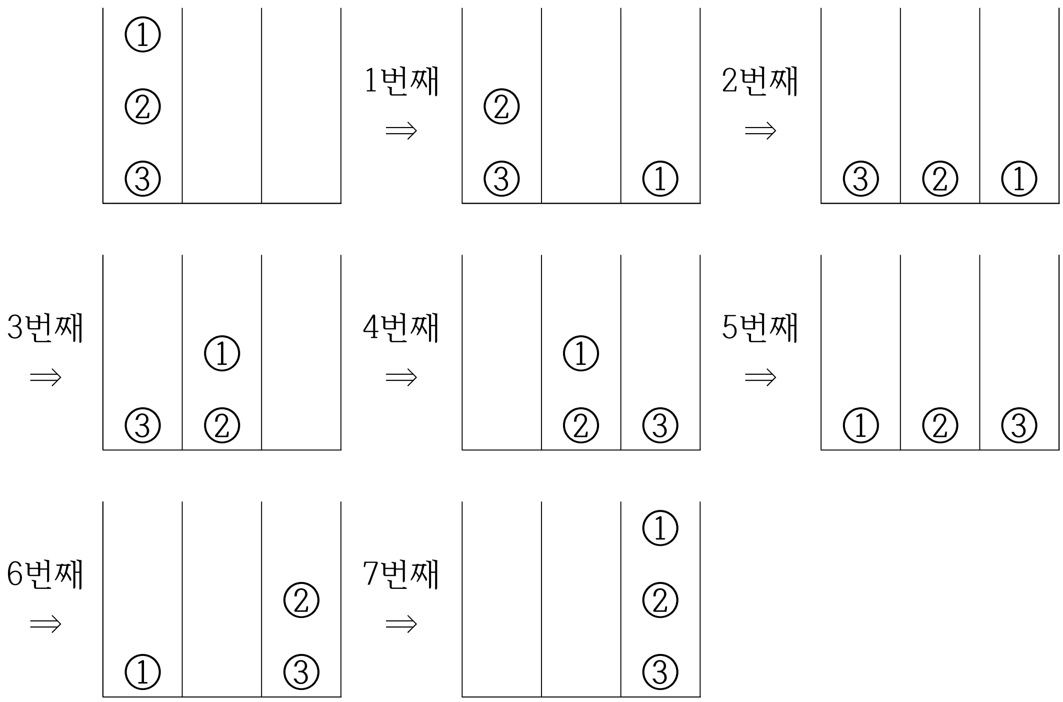
하위 문항	채점 기준	배점
	(1) 채점기준 A. 풀이가 맞고, 방법을 그림이나 설명을 통해 이해가 쉽도록 조리 있게 기술했다. C. 풀이가 맞으나, 방법 설명이 조리 있지 못하다. E. 질문에 대해 의미를 모른다. (2) 채점기준 A. 풀이가 맞고, 방법을 조리 있게 기술했다. B. 풀이가 맞으나, 방법 설명이 조리 있지 못하다. C. 풀이의 방향의 제시했으나, 문제를 해결하지 못했다. E. 질문에 대해 의미를 모른다. (3) 채점기준 A. 풀이가 모두 맞고, 증명을 조리 있게 기술했다. C. 풀이가 모두 맞으나, 증명이 조리 있지 못하다.	

	E. 질문에 대해 의미를 모른다.	

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시 답안

【문제 1-1】
원반을 크기순으로 ①<②<③ 이라 하자.



【문제 1-2】
세가지 답안을 제시한다.

<답안1>

$H_{100}=2H_{99}+1=2(2H_{98}+1)+1=2^2H_{98}+2+1=\cdots=2^{99}H_1+2^{98}+2^{97}+2^{96}+\cdots+2+1$
이 성립한다. $H_1=1$ 이므로,

$$H_{100}=2^{99}+2^{98}+2^{97}+2^{96}+\cdots+2+1=\frac{2^{100}-1}{2-1}=2^{100}-1 \text{ 이다.}$$

<답안2> (등비수열을 이용)

$H_{n+1}+1=2(H_n+1)$을 만족한다. $a_n=H_n+1$ 이라 놓자. a_n은 첫째항과 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n \ (n\geq 1)$을 만족한다. 따라서 $H_n=a_n-1=2^n-1 \ (n\geq 1)$이다.
그러므로 $H_{100}=2^{100}-1$ 이다.

<답안3> (수학적 귀납법을 이용)

먼저 관찰을 통해

$$H_n=2^n-1 \ (n\geq 1) \qquad \text{---------------} \ (*)$$

을 추측할 수 있다. 이를 수학적 귀납법으로 증명해 보자.
(i) n=1 이면 $H_1=1$ 이므로 (*)가 성립한다.
(ii) n=k일 때 (*)가 성립한다고 가정하고 n=k+1일 때 (*)가 성립함을 보이자.
n=k일 때 (*)가 성립하므로 $H_k=2^k-1$이 성립한다. 그러므로

$$H_{k+1}=2H_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-2+1=2^{k+1}-1$$

이다. 즉, n=k+1일 때 (*)가 성립한다.

【문제 1-3】
$H_{n+1}\geq 2H_n+1$을 증명하자.

n+1개의 원반을 가진 하노이 퍼즐을 해결하기 위해서는 맨 아래에 있는 가장 큰 원반을 오른쪽 기둥으로 옮겨야 한다. 이를 위해서는 그 위의 n개의 원반들이 모두 가운데 기둥에 위치해야 한다. 그러므로 적어도 H_n번의 이동이 필요하다. 그 후에 가장 큰 원반을 오른쪽 기둥으로 옮기는데 한번의 이동이 필요하다. 마지막으로 가운데 기둥에 있는 n개의 원반을 오른쪽 기둥으로 옮기는 데 또다시 적어도 H_n번의 이동이 필요하다. 모두 합하면 적어도 $2H_n+1$번의 이동이 필요하다.