2020학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ①	03. ③	04. ②	05. ④
06. ④	07. ②	08. ⑤	09. ③	10. ⑤
11. ④	12. ④	13. ①	14. ③	15. ③
16. ④	17. ②	18. ②	19. ①	20. ④
21. ⑤	22. 32	23. 4	24. 25	25. 400
26. 2	27. 90	28. 49	29. 86	30. 93

1. **출제의도** : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\vec{a}+2\vec{b}=(1,0)+2(1,1)$$
$$=(1,\ 0)+(2,2)$$
$$=(3,\ 2)$$

따라서 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은 5이다.

정답 ⑤

2. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-e^{4x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{6x}-1)-(e^{4x}-1)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{2x}$$
$$=3\times\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{6x}-2\times\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}$$
$$=3-2=1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 외분점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 x좌표는

$$\frac{3\times1-1\times a}{3-1}=\frac{3-a}{2}$$

이고, 이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{3-a}{2}=0$$

따라서 $a=3$

정답 ③

4. **출제의도** : 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

십의 자리는 조건 (나)에서 6의 약수인 $1, 2, 3, 6$이 와야 하므로 십의 자리의 경우의 수는 4이다.

이 각각에 대하여 조건 (가)에서 두 자리 자연수가 2의 배수이어야 하므로 일의 자리의 수는 $0, 2, 4, 6, 8$이어야 하므로 경우의 수는 5이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$4\times5=20$$

정답 ②

5. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$

한편, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{10}$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C\mid B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

정답 ④

6. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 평면곡선의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\pi x=\cos y+x\sin y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\pi=-\sin y\times\frac{dy}{dx}+\sin y+x\cos y\times\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin y-\pi}{\sin y-x\cos y}$$

(단, $\sin y-x\cos y\neq 0$)

따라서 점 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\pi}{\sin\frac{\pi}{2}-0\times\cos\frac{\pi}{2}}=1-\pi$$

정답 ④

7. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(2+x)^4(1+3x)^3$의 전개식에서 x의 항은 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $(2+x)^4$에서 상수항, $(1+3x)^3$에서 x의 항인 경우

$(2+x)^4$에서 상수항은

${}_4\mathrm{C}_0x^0\times 2^4=16$

$(1+3x)^3$에서 x항은

${}_3\mathrm{C}_1(3x)^1\times 1^2=9x$

그러므로 x의 계수는

$16\times 9=144$

(ii) $(2+x)^4$에서 x의 항, $(1+3x)^3$에서 상수항인 경우

$(2+x)^4$에서 x항은

${}_4\mathrm{C}_1x^1\times 2^3=32x$

$(1+3x)^3$에서 상수항은

${}_3\mathrm{C}_0(3x)^0\times 1^3=1$

그러므로 x의 계수는

$32\times 1=32$

(i), (ii)에서 구하는 x의 계수는

$144+32=176$

정답 ②

8. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}$$

$$=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

이므로 $f'(e)=\frac{1-2\ln e}{e^3}=-\frac{1}{e^3}$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(e+h)-f(e)\}-\{f(e-2h)-f(e)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(e-2h)-f(e)}{h}$$

$$=f'(e)+2f'(e)$$

$$=3f'(e)$$

$$=3\times\left(-\frac{1}{e^3}\right)=-\frac{3}{e^3}$$

정답 ⑤

9. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$$\sin\theta=\frac{4}{5}$$

따라서

$$\csc(\pi+\theta)=\frac{1}{\sin(\pi+\theta)}$$

$$=\frac{1}{-\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{-\frac{4}{5}}=-\frac{5}{4}$$

정답 ③

10. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a와 b가 짝수이고 짝수의 개수가 3개이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 선택한 공이 짝수 1개, 홀수 2개인 경우

이 사건을 A라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{18}{35}$$

(ⅱ) 선택한 공이 짝수 2개, 홀수 1개인 경우

이 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{12}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

$$=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}$$

$$=\frac{6}{7}$$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 함수의 극댓값과 극솟값의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x\times e^{-x}+(x^2-3)\times(-e^{-x})$

$=-(x^2-2x-3)e^{-x}$

$=-(x+1)(x-3)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=3$에서 극대이다.

따라서

$a=f(3)=6e^{-3}$, $b=f(-1)=-2e$

이므로

$a\times b=6e^{-3}\times(-2e)$

$=-12e^{-2}$

$=-\dfrac{12}{e^2}$

정답 ④

12. **출제의도** : 표준정규분포표를 이용하여 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{m}{3}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\dfrac{m}{3}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이때

$$\mathrm{P}\left(X\le\frac{9}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987$$

이고, 표준정규분포표에 따르면

$\mathrm{P}(Z\le 3)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.5+0.4987=0.9987$

이므로

$$\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}=3$$

따라서 $m=\dfrac{9}{4}$

정답 ④

13. **출제의도** : 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 x좌표를 a라 하자.

두 곡선 $y=ke^x+1$, $y=x^2-3x+4$가 점 P에서 만나므로

$ke^a+1=a^2-3a+4$ ----㉠

또, $y=ke^x+1$에서 $y'=ke^x$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 ke^a 이다.

$y=x^2-3x+4$에서 $y'=2x-3$이므로 점 P에서 접선의 기울기는 $2a-3$이다.

이 두 접선이 서로 수직이므로

$ke^a(2a-3)=-1$ ----㉡

㉠에서

$ke^a=a^2-3a+3$

이므로 ㉡에 대입하면

$(a^2-3a+3)(2a-3)=-1$

$2a^3-9a^2+15a-8=0$

$(a-1)(2a^2-7a+8)=0$

$a=1$ 또는 $2a^2-7a+8=0$

이때, $2a^2-7a+8=0$의 판별식을 D라

하면

$D=(-7)^2-4\times2\times8<0$

이므로 허근을 갖는다.

그러므로

$a=1$

따라서 ㉠에서

$k=\dfrac{a^2-3a+3}{e^a}$

이므로 $a=1$을 대입하면

$k=\dfrac{1}{e}$

정답 ①

14. 출제의도 : 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\le t\le\dfrac{1}{\sqrt{k}}$인 실수 t에 대하여

$f(t)=2\sqrt{t}\,e^{kt^2}$이므로

직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{t}\,e^{kt^2}\right)^2$

$\quad=\sqrt{3}\,te^{2kt^2}$

따라서 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}S(t)\,dt$

$\displaystyle=\sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}te^{2kt^2}\,dt$

이때, $t^2=s$로 놓으면

$t=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$일 때 $s=\dfrac{1}{2k}$,

$t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$일 때 $s=\dfrac{1}{k}$이고,

$2t\dfrac{dt}{ds}=1$이므로

입체도형의 부피는

$\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{k}}e^{2ks}\,ds=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2k}e^{2ks}\right]_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{k}}$

$\displaystyle\qquad=\frac{\sqrt{3}}{4k}(e^2-e)$

이므로 $4k=1$에서 $k=\dfrac{1}{4}$

정답 ③

15. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-\ln x$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 원점을 중심으로 시계방향으로 90° 회전시킨 모양이고, 조건 (나)에 의하여 $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$이므로 점 B를 원점을 중심으로 시계반대방향으로 90° 회전시킨 점을 B′이라 하면 점 B′은 곡선 $y=e^x$ 위에 있고 세 점 O,B′,A는 한 직선 위에 있다.

점 A의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 조건 (가)에 의하여 점 B′의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{e^t}{2}\right)$이다.

이때 점 B′이 곡선 $y=e^x$ 위에 있으므로

$\dfrac{e^t}{2}=e^{\frac{t}{2}}$

$(e^t)^2=4e^t$

$e^t>0$이므로 $e^t=4$

즉, $t=\ln 4=2\ln 2$이므로 점 A의 좌표는
$(2\ln 2,\ 4)$

따라서 직선 OA의 기울기는

$$\frac{4}{2\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$$

정답 ③

16. **출제의도** : 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 정사영의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 E는 선분 CD를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 0+1\times 0}{2+1},\ \frac{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)+1\times 2}{2+1},\ \frac{2\times(-2)+1\times 1}{2+1}\right)$$

즉, $(0,\ -1,\ -1)$

이때, 직선 AE의 방향벡터를 $\vec{d}$라 하면

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(0,\ -1,\ -1)-(3,0,0)$$
$$=(-3,\ -1,\ -1)$$

평면 ABC의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,3,0)-(3,\ 0,\ 0)=(-3,\ 3,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,\ 1)-(3,\ 0,\ 0)=(-3,2,1)$$

이때, 벡터 $\vec{n}$은 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 수직이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0$$

에서

$$(-3,\ 3,\ 0)\cdot(a,\ b,\ c)=0$$
$$(-3,2,1)\cdot(a,b,c)=0$$

이므로

$$-3a+3b=0,\ -3a+2b+c=0$$

그러므로

$$a=b=c$$

이때 $\vec{n}=(1,1,1)$이라 하고, 직선 AE와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|}$$
$$=\frac{|(-3)\times 1+(-1)\times 1+(-1)\times 1|}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2}\,\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{33}}$$

즉, $\sin\theta=\frac{5}{\sqrt{33}}$이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$$

따라서 선분 AE의 평면 ABC 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{\mathrm{AE}}\cos\theta$$
$$=\sqrt{(0-3)^2+\{(-1)-0\}^2+\{(-1)-0\}^2}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$$
$$=\sqrt{11}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

정답 ④

17. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$f(x)g(x)=x^4-1$이므로

$f(1)g(1)=0$, $f(-1)g(-1)=0$

또, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3$ …… ㉠

한편, $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx$에서

$u(x)=\{f(x)\}^2$, $v'(x)=g'(x)$로 놓으면

$u'(x)=2f(x)f'(x)$, $v(x)=g(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx$$

$$=\left[\{f(x)\}^2 g(x)\right]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}f(x)f'(x)g(x)\,dx$$

$$=0-2\int_{-1}^{1}f(x)f'(x)g(x)\,dx$$

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^{1}f(x)f'(x)g(x)\,dx=-60$$

㉠에서

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)(4x^3-f(x)g'(x))\}\,dx=-60$$

$$4\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx-\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx=-60$$

$$4\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx-120=-60$$

따라서

$$4\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx=60$$

이므로

$$\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx=15$$

정답 ②

18. **출제의도** : 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x, y, z)=(6, 1, 2)$인 경우는 공 12개가 들어 있는 주머니에서 9개의 공을 꺼낼 때 빨간색 공 6개, 파란색 공 1개, 노란색 공 2개를 꺼내는 경우이므로

$$p=\frac{{}_6C_6\times{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_{12}C_9}=\frac{9}{220}$$

$(x, y, z)=(6, 2, 1)$인 경우도 마찬가지 방법으로 계산할 수 있다.

$(x, y, z)=(6, 2, 2)$인 경우는 9개의 공을 꺼낼 때까지 빨간색 공 5개, 파란색 공 2개, 노란색 공 2개가 나오고, 10번째 시행에서 빨간색 공이 나오는 경우이므로

$$q=\frac{{}_6C_5\times{}_3C_2\times{}_3C_2}{{}_{12}C_9}\times\frac{1}{3}=\frac{18}{220}=\frac{9}{110}$$

따라서

$$p+q=\frac{9}{220}+\frac{9}{110}=\frac{27}{220}$$

정답 ②

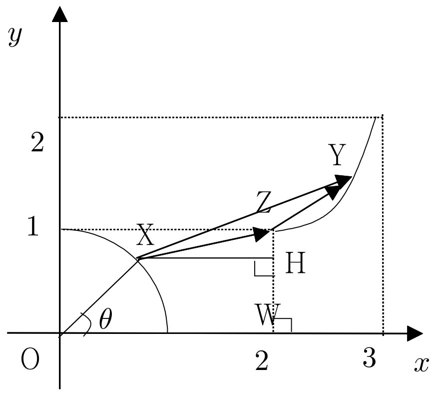
19. **출제의도** : 벡터의 연산을 이용하여 점 P가 나타내는 영역을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{XY}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

선분 OX가 x축과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 포물선 $y=(x-2)^2+1$의 꼭짓점을 $\mathrm{Z}(2, 1)$이라 하고 점 Z에서 x축에 내린 수선의 발을 W, 점 X에서 선분 ZW에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이때, ㉠에서

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XZ}+\overrightarrow{ZY}$ ……㉡

한편 점 X의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로

$\overline{XH}=2-\cos\theta$

$\overline{ZH}=1-\sin\theta$

그러므로

$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{OZ'}$ ……㉢

인 점 Z'의 좌표는 $(2-\cos\theta, 1-\sin\theta)$이다.

이때,

$2-\cos\theta=x$, $1-\sin\theta=y$라 하면

$\cos\theta=2-x$, $\sin\theta=1-y$

이므로

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

이때, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$이므로

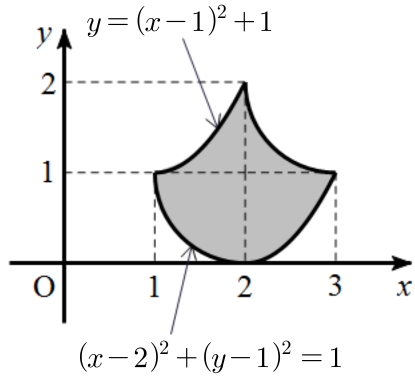
$1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$

그러므로 점 Z'은 중심이 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 중 $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$인 점이다.

㉡과 ㉢에서

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OZ'}+\overrightarrow{ZY}$

이므로 점 P가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분이다.



점 P가 점 $(3, 1)$일 때, 선분 OP의 길이가 최대이므로

$M=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

또, 점 $C(2, 1)$에 대하여 점 P가 선분 OC와 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$이 만나는 점일 때 선분 OP의 길이가 최소이므로

$m=\overline{OP}-1$

$=\sqrt{2^2+1^2}-1$

$=\sqrt{5}-1$

따라서

$M^2+m^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{5}-1)^2$

$=16-2\sqrt{5}$

정답 ①

20. **출제의도** : 도형의 성질을 활용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 OHP에서 $\overline{OP}=1$, $\angle POH=\theta$이므로

$\overline{PH}=\sin\theta$, $\overline{OH}=\cos\theta$

즉, $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

한편 $\angle OPQ=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{OQ}=\sec\theta$이므로

$\angle OQP = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, $\overline{AQ} = \sec\theta - 1$

즉, $g(\theta) = \dfrac{1}{2}(\sec\theta - 1)^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{(\sec\theta-1)\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\times\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\theta\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\times\sin\theta\cos\theta(\sec\theta+1)}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\left\{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos^3\theta(\sec\theta+1)}\right\}$$

$$= 2\times\sqrt{\frac{\pi}{4}}\times1\times\frac{1}{1\times2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

정답 ④

21. 출제의도 : 타원의 방정식과 타원의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B가 초점이고 점 $(0, 6)$을 지나는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이라 하면

$a^2 - b^2 = 4$, $\dfrac{36}{b^2} = 1$에서

$a^2 = 40$, $b^2 = 36$이므로 $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

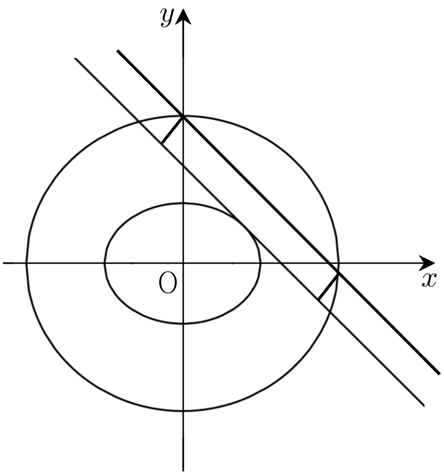
또, 두 점 A, B가 초점이고 점 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$을 지나는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{d^2} = 1$이라 하면

$c^2 - d^2 = 4$, $\dfrac{25}{4c^2} + \dfrac{9}{4d^2} = 1$에서

$c^2 = 10$, $d^2 = 6$이므로 $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6} = 1$

조건을 만족시키는 직사각형은 두 점 $(0, 6)$, $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$을 지나고, 타원 $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{36} = 1$의 경계 및 내부와 타원 $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6} = 1$의 경계 및 외부의 공통부분에 존재해야 한다.

즉 넓이가 최대인 직사각형은 그림과 같다.



타원 $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식이 $x + y - 4 = 0$이므로 점 $(0, 6)$과 직선 $x + y - 4 = 0$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}$

또, 직선 $y = -x + 6$과 타원 $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{36} = 1$이 만나는 점 중 점 $(0, 6)$이 아닌 점의 x좌표는

$\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{(-x+6)^2}{36} = 1$에서 $x = \dfrac{120}{19}$

즉 점 $(0, 6)$과 직선 $y = -x + 6$과 타원

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$이 만나는 점 중 점 $(0, 6)$이 아닌 점 $\left(\frac{120}{19}, -\frac{6}{19}\right)$사이의 거리는

$\frac{120\sqrt{2}}{19}$

따라서 넓이가 최대인 직사각형은 두 변의 길이가 각각 $\sqrt{2}$, $\frac{120\sqrt{2}}{19}$인 직사각형이므로 구하는 넓이는

$\sqrt{2}\times\frac{120\sqrt{2}}{19}=\frac{240}{19}$

정답 ⑤

22. 출제의도 : 이항분포의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$를 따르고 $\mathrm{V}(X)=6$이므로

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$

따라서 $n=32$

정답 32

23. 출제의도 : 매개변수로 나타낸 함수의 속도벡터를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=e^{t-1}-a$, $\frac{dy}{dt}=be^{t-1}$이므로

시각 $t=1$에서의 속도벡터는

$\vec{v}=(1-a, b)$

따라서

$1-a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=2+2=4$

정답 4

24. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

이므로

$g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

이때 $f'(x)=2\sec^2 2x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sec^2\frac{\pi}{4}=2\times(\sqrt{2})^2=4$

따라서 $g'(1)=\frac{1}{4}$이므로

$100\times g'(1)=100\times\frac{1}{4}=25$

정답 25

25. 출제의도 : 모비율의 추정을 할 수 있는가?

정답풀이 :

고등학교 학생 중 n명을 임의추출한 표본비율이 $\frac{9}{10}$이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\frac{9}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}{n}}\le p\le\frac{9}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}{n}}$$

한편, 신뢰구간이 $0.9-c\le p\le 0.9+c$ 이므로

$$c=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}{n}}$$

이때, $c=0.0294$이므로

$$1.96\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{\sqrt{n}}=0.0294$$

$$\sqrt{n}=\frac{3\times1960}{294}$$

$$\sqrt{n}=\frac{1960}{98}=20$$

따라서 $n=400$

정답 400

26. **출제의도** : 함수의 그래프가 한 개의 변곡점을 갖도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3k\cos kx+12x^2$

$f''(x)=-3k^2\sin kx+24x$

$f''(x)=0$에서 $3k^2\sin kx=24x$

$g(x)=3k^2\sin kx$라 하면

곡선 $y=g(x)$는 원점에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=24x$가 원점에서만 만나야 하므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 기울기가 24 이하이어야 한다.

$g'(x)=3k^3\cos kx$이므로 $g'(0)=3k^3$

따라서

$3k^3\le24$에서 $k\le2$

즉 실수 k의 최댓값은 2이다.

정답 2

27. **출제의도** : 포물선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 F$(1,0)$이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6이므로

$\frac{a+b+1}{3}=6$에서 $a+b=17$

한편, 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고, 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=a+1$, $\overline{\mathrm{BF}}=b+1$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}&=(a+1)(b+1)\\&=ab+a+b+1=ab+18\end{aligned}$$

이때 a, b는 $a+b=17$을 만족시키는 자연수이므로 ab는 $a=8$, $b=9$ 또는 $a=9$, $b=8$일 때 최댓값 72를 갖는다.

따라서 구하는 $\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}$의 최댓값은

$72+18=90$

정답 90

28. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) 여학생이 연필 각 1자루씩, 남학생이 볼펜 각 1자루씩 받는 경우

남은 연필 4자루를 남학생 2명이 각각 a, b자루씩 받는 경우의 수는

$a+b=4$에서 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

남은 볼펜 2자루를 여학생 3명이 각각 c, d, e자루씩 받는 경우의 수는

$c+d+e=2$에서 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

즉 이 경우의 수는 $5\times6=30$

(ⅱ) 여학생이 연필 각 2자루씩, 남학생이 볼펜 각 1자루씩 받는 경우

남은 연필 1자루를 남학생 2명이 각각 a, b자루씩 받는 경우의 수는

$a+b=1$에서 ${}_2H_1={}_2C_1=2$

남은 볼펜 2자루를 여학생 3명이 각각 c, d, e자루씩 받는 경우의 수는

$c+d+e=2$에서 ${}_3H_2={}_4C_2=6$

즉 이 경우의 수는 $2\times6=12$

(ⅲ) 여학생이 연필 각 1자루씩, 남학생이 볼펜 각 2자루씩 받는 경우

남은 연필 4자루를 남학생 2명이 각각 a, b자루씩 받는 경우의 수는

$a+b=4$에서 ${}_2H_4={}_5C_4=5$

즉 이 경우의 수는 5

(ⅳ) 여학생이 연필 각 2자루씩, 남학생이 볼펜 각 2자루씩 받는 경우

남은 연필 1자루를 남학생 2명이 각각 a, b자루씩 받는 경우의 수는

$a+b=1$에서 ${}_2H_1={}_2C_1=2$

즉 이 경우의 수는 2

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$30+12+5+2=49$

정답 49

29. 출제의도 : 공간벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 $P(a, b, c)$라 하면

$a+b+\sqrt{2}c=0$

조건 (가)에 의하여

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=6$

$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=6$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{OA}|^2=6$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-16=6$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=22$

$(4, 0, 0)\cdot(a, b, c)=22$

즉, $4a=22$이므로 $a=\frac{11}{2}$

즉, $b+\sqrt{2}c=-\frac{11}{2}$

한편, $|\overrightarrow{OP}|$가 9 이하의 자연수이므로

$a^2+b^2+c^2=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$

이때 $a^2+b^2+c^2=\frac{121}{4}+b^2+c^2\geq\frac{121}{4}$이어야 하므로

$a^2+b^2+c^2=36, 49, 64, 81$

그런데 $a^2+b^2+c^2=36$,

즉 $b^2+c^2=36-\frac{121}{4}=\frac{23}{4}$인 경우

$b+\sqrt{2}c=-\frac{11}{2}$을 동시에 만족시키는 실수 b, c가 존재하지 않으므로

$a^2+b^2+c^2=49, 64, 81$

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP}&=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}\\&=|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\\&=a^2+b^2+c^2-22\end{aligned}$$

이므로

$M=81-22=59$

$m=49-22=27$

따라서 $M+m=59+27=86$

정답 86

30. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$

이므로 양변에 $(x^2+x+1)'=2x+1$을 곱하고 $f(1)=a$, $f(3)=b$라 놓으면

$f'(x^2+x+1)\times(2x+1)$

$=a\pi\times(2x+1)\sin\pi x+b(2x^2+x)+10x^3+5x^2$

이때, 좌변을 부정적분하면

$\int f'(x^2+x+1)(2x+1)dx$

$=f(x^2+x+1)+C_1$ ……㉠

우변을 부정적분하면

$\int\{a\pi(2x+1)\sin\pi x+b(2x^2+x)+10x^3+5x^2\}dx$

$=a\pi\int(2x+1)\sin\pi x dx$

$+\int\{b(2x^2+x)+10x^3+5x^2\}dx$

$=-a(2x+1)\cos\pi x-a\int(-2\cos\pi x)dx$

$+b\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3$

$=-a(2x+1)\cos\pi x+\frac{2a}{\pi}\sin\pi x$

$+b\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+C_2$

……㉡

그러므로 ㉠과 ㉡에서

$f(x^2+x+1)$

$=-a(2x+1)\cos\pi x+\frac{2a}{\pi}\sin\pi x$

$+b\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+C$ ……㉢

이때, $f(x^2+x+1)$에서 $x^2+x+1=1$이면

$x^2+x=0$

$x=0$ 또는 $x=-1$

$x=0$을 ㉢에 대입하면

$f(1)=-a+C$

이때, $f(1)=a$이므로

$2a=C$ ……㉣

또, $x=-1$을 대입하면

$f(1)=-a-\frac{1}{6}b+\frac{5}{6}+C$

이때, $f(1)=a$이므로

$12a+b-6C=5$ ……㉤

또, $x^2+x+1=3$에서

$x^2+x-2=0$

$x=1$ 또는 $x=-2$

$x=1$을 ㉢에 대입하면

$f(3)=3a+\frac{7}{6}b+\frac{25}{6}+C$

이때, $f(3)=b$이므로

$18a+b+6C=-25$ ……㉥

㉣을 ㉤, ㉥에 대입하면

$b=5$, $30a=-30$

즉, $a=-1$, $b=5$,

이때, ㉣에서 $C=-2$

따라서

$f(x^2+x+1)$

$=(2x+1)\cos\pi x-\frac{2}{\pi}\sin\pi x$

$+5\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-2$ ……㉦

이때, $x^2+x+1=7$에서

$x^2+x-6=0$

$x=2$ 또는 $x=-3$

㉦에 $x=2$를 대입하면

$f(7)=5+5\times\left(\frac{16}{3}+2\right)+40+\frac{40}{3}-2$

$=93$

정답 93