2021학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ②	03. ④	04. ③	05. ①
06. ③	07. ②	08. ①	09. ④	10. ⑤
11. ③	12. ①	13. ②	14. ①	15. ④
16. ③	17. ②	18. ⑤	19. ④	20. ①
21. ④	22. 24	23. 21	24. 33	25. 4
26. 7	27. 46	28. 15	29. 114	30. 331

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=2\times 2^3=16$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+12n}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{9+\frac{12}{n}}+3}$$
$$=\frac{12}{\sqrt{9+0}+3}$$
$$=2$$

정답 ②

3. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_n=r^{n-1}$

이므로

$a_3=a_2+6$ 에서 $r^2=r+6$

$r^2-r-6=0$, $(r-3)(r+2)=0$

$r>0$ 이므로 $r=3$

따라서, $a_4=r^3=27$

정답 ④

4. **출제의도** : 같은 것이 들어있는 순열의 수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

a, a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!2!}=\frac{6\times5\times4}{2}=60$$

정답 ③

5. **출제의도** : 급수의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=10$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2{a_n}^2+3n^2}{{a_n}^2+n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+2\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+3}{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+1}$$

$$=\frac{0+0+3}{0+1}$$

$=3$

정답 ①

6. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 점 $(2,\log_4 a)$, $(3,\log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 각각 두 점을 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.
즉,

$\frac{\log_4 a}{2}=\frac{\log_2 b}{3}$ 에서 $\frac{1}{4}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 b$

이므로

$$\log_2 a=\frac{4}{3}\log_2 b$$

따라서,

$$\log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{\log_2 b}{\frac{4}{3}\log_2 b}=\frac{3}{4}$$

정답 ③

7. **출제의도** : 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(x)$는 다음의 네 가지로 나누어 계산할 수 있다.
(i) $-4<x<4$인 경우

$-1<\frac{x}{4}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}=0$$

따라서

$$f(x)=\frac{2\times 0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

(ii) $x=-4$인 경우

$$f(x)=\frac{2\times(-1)-1}{1+3}=-\frac{3}{4}$$

(iii) $x=4$이면

$$f(x)=\frac{2\times 1-1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

(iv) $x<-4$ 또는 $x>4$인 경우

$\frac{x}{4}<-1$ 또는 $\frac{x}{4}>1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{x}{4}-\frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}}}{1+\frac{3}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}}}$$

$$=\frac{\frac{x}{2}-0}{1+0}=\frac{x}{2}$$

$f(k)=\frac{k}{2}=-\frac{1}{3}$에서 $k=-\frac{2}{3}$이고 이는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7이다.

정답 ②

8. **출제의도** : 원순열을 이용하여 경우의의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고, 2

학년 학생 2명을 1명으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이 각각에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

정답 ①

9. **출제의도** : 주어진 구간에서 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$의 밑은 1보다 작다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 -4, $x=12$에서 최솟값 m을 갖는다.

$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-2\log_2 k=-4$

$\log_2 k=2$

따라서 $k=2^2=4$

그리고

$m=f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)$

$\quad=2\log_{\frac{1}{2}}16=-2\log_2 2^4$

$\quad=-2\times4=-8$

그러므로

$k+m=4+(-8)=-4$

정답 ④

10. **출제의도** : 연속함수의 성질을 알고 있는가?

정답풀이 :

$(e^{2x}-1)^2 f(x)=a-4\cos\frac{\pi}{2}x$에서

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a-4$에서

$a=4$

$x\neq0$이면 $e^{2x}-1\neq0$이므로

$$f(x)=\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}\quad(x\neq0)$$

이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

따라서

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2}{\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2}\times\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}$$

따라서

$$a\times f(0)=4\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x)=\frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$$ 이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times(e^x+1)^2-f(x)\times 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{f'(x)\times(e^x+1)-2e^xf(x)}{(e^x+1)^3}$$

따라서

$$g'(0)=\frac{f'(0)\times(e^0+1)-2e^0f(0)}{(e^0+1)^3}$$

$$=\frac{2f'(0)-2f(0)}{2^3}$$

$$=\frac{f'(0)-f(0)}{4}$$

$$=\frac{2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ③

12. **출제의도** : 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

이므로 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$ 일 때,

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$ 이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 7, 9, 11 이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$ 일 때,

즉, $3<n<6$ 이고 n이 짝수이어어야 하므로 n은 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

정답 ①

13. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 알고 있는가?

정답풀이 :

$|a-3|+|b-3|=2$인 사건을 A,

$a=b$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

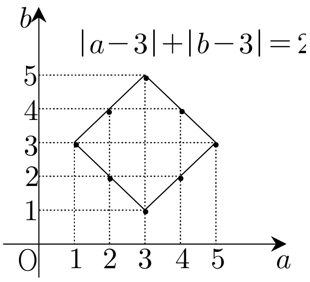
주사위를 던져서 나온 눈 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

사건 A가 일어나는 경우는

(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 3)

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{36}$$



사건 B가 일어나는 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}$$

사건 $A\cap B$가 일어나는 경우는

(2, 2), (4, 4)

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}$$

따라서 확률의 덧셈정리에 의해

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}$$
$$=\frac{1}{3}$$

정답 ②

14. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이차방정식

$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$

의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\ \geq\ 0$

이어야 한다.

즉, $\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\ \geq\ 0$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5\ \geq\ 0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\ \leq\ 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\ \leq 0$

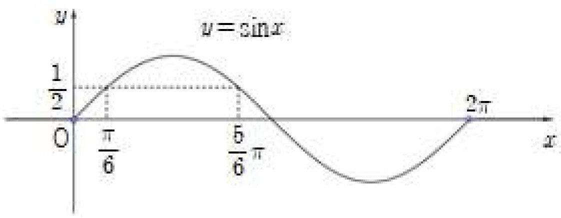
$\sin\theta-2<0$이므로

$2\sin\theta-1\ \geq\ 0$

$\sin\theta\ \geq\ \frac{1}{2}$

이때 $0\ \leq\ \theta<2\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\ \leq\ \theta\ \leq\ \frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$$4\beta-2\alpha=4\times\frac{5}{6}\pi-2\times\frac{\pi}{6}$$
$$=3\pi$$

정답 ①

15. 출제의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명할 수 있는가?

정답풀이 :

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$$
$$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times2^{(m+1)m}+m\times2^{-(m+1)}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}$$
$$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}$$
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

즉, $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

정답 ④

16. 출제의도 : 지수함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q의 y좌표는 각각 $e^{\frac{k}{2}}$, $e^{\frac{k}{2}+3t}$ 이므로

$\overline{PQ}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$

점 R의 x 좌표는 방정식

$e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{k}{2}+3t}$

의 실근이므로

$\frac{x}{2}=\frac{k}{2}+3t$에서

$x=k+6t$

따라서

$\overline{QR}=(k+6t)-k=6t$

$\overline{PQ}=\overline{QR}$에서

$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

$e^{\frac{k}{2}}=\frac{6t}{e^{3t}-1}$이므로

$k=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

즉,

$f(t)=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}f(t)&=2\lim_{t\to0+}\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}\\&=2\lim_{t\to0+}\ln\frac{2}{\frac{e^{3t}-1}{3t}}\\&=2\ln2=\ln4\end{aligned}$$

정답 ③

17. **출제의도** : 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

조건 (가)에 의해

4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 5, 6, 7이 적혀 있는 3장의 카드 중 2장이다.

(i) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 6, 7이 적혀 있는 카드인 경우

$\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{7}$일 때

조건 (나)에 의해

5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 3장의 카드 중 2장이고 이 2장의 카드의 위치를 바꿀 수 있으므로 이때의 경우의 수는

${}_3C_2\times2!={}_3C_1\times2!=6$

이 각각에 대하여 4가 적힌 카드와 양옆에 있는 카드를 1장의 카드로 생각하고, 5가 적힌 카드와 양옆에 있는 카드를 1장의 카드로 생각하여 남은 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 $\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{7}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times6=36$

마찬가지로 $\boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

36

따라서 주어진 조건을 만족시키는 경우

의 수는

$36+36=72$

(ii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 6이 적혀 있는 카드인 경우

$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$일 때

조건 (나)에 의해

5가 적혀 있는 카드의 왼쪽 옆에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 3장의 카드 중 1장이므로 이때의 경우의 수는

3

이 각각에 대하여 5가 적혀 있는 카드의 왼쪽 옆에 있는 카드와 5가 적혀 있는 카드, 4가 적혀 있는 카드, 6이 적혀 있는 카드를 1장의 카드로 생각하여 남은 3장의 카드와 함께 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times 24=72$

마찬가지로 $\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{5}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

72

따라서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$72+72=144$

(iii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 7이 적혀 있는 카드인 경우

(ii)와 마찬가지로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

144

(i), (ii), (iii)에서

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$72+144+144=360$

따라서 구하는 확률은

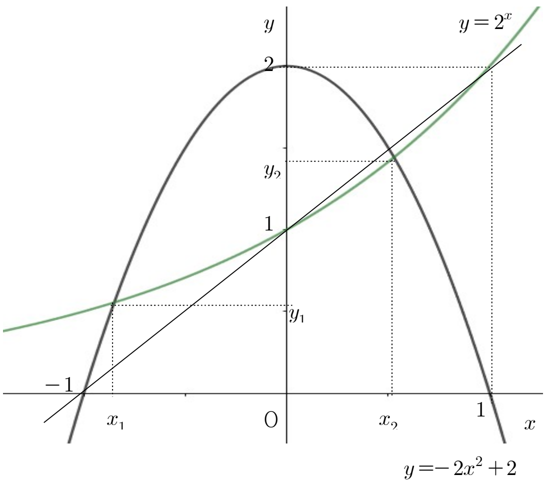
$\dfrac{360}{7!}=\dfrac{1}{14}$

정답 ②

18. 출제의도 : 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<x_2$ 에서 $-2x^2+2>2^x$

$x_2<x<1$ 에서 $-2x^2+2<2^x$

이고

$x=\dfrac{1}{2}$일 때, $-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{1}{2}$일 때 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

이므로 $\dfrac{3}{2}>\sqrt{2}$

따라서, $\dfrac{1}{2}<x_2$ 이다. (참)

ㄴ. 위의 그림에서 두 점 $(0,1)$, (x_2,y_2)를 잇는 직선의 기울기는 1보다 작으므로

$\frac{y_2-1}{x_2}<1$, $y_2-1<x_2 \cdots$ ㉠

두 점 $(0,1),(x_1,y_1)$을 잇는 직선의 기울기는 1보다 작으므로

$\frac{y_1-1}{x_1}<1$, $y_1-1>x_1$, $x_1<y_1-1 \cdots$ ㉡

㉠,㉡의 두 식을 더하면

$x_1+y_2-1<x_2+y_1-1$

$x_1+y_2<x_2+y_1$

$y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)

ㄷ. ㄱ과 같은 방법으로 생각하면

$x_1<-\frac{1}{2}$

즉, $-1<x_1<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x_2<1$ 이므로

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2}$

그런데,

$$\begin{aligned} y_2-y_1 &= 2^{x_2}-2^{x_1} \\ &= (-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2) \\ &= 2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0 \end{aligned}$$

이므로 $x_1+x_2<0$ 이어야 한다.

따라서, $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$ 이고

$y_1y_2=2^{x_1}\times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$

에서 밑이 1보다 크므로

$2^{-\frac{1}{2}}<y_1y_2<2^0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

19. **출제의도** : 순열과 조합을 이용하여 주어진 조건에 맞는 함수의 개수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $B=\{1, 2, 3\}$으로의 모든 함수 f의 개수는

$3^4=81$

$f(1)\geq 2$인 함수의 개수는

$2\times 3^3=54$

치역이 B인 함수 f의 개수는

정의역을 원소의 개수가 2, 1, 1인 세 개의 집합으로 나눈 후 집합 B에 일대일대응을 시키면 되므로

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\times 3!=36$

한편 $f(1)=2$이고 치역이 B인 함수 f의 개수는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a\neq 1$인 a에 대하여 $f(a)=2$인 a가 존재하는 경우

$3!=6$

(ii) $a\neq 1$인 모든 a에 대하여 $f(a)\neq 2$인 경우

${}_3C_2\times 2!=6$

따라서 $f(1)=2$이고 치역이 B인 함수 f의 개수는

$6+6=12$

한편, $f(1)=3$이고 치역이 B인 함수 f의 개수도 12이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{54+36-(12+12)}{81}=\frac{22}{27}$

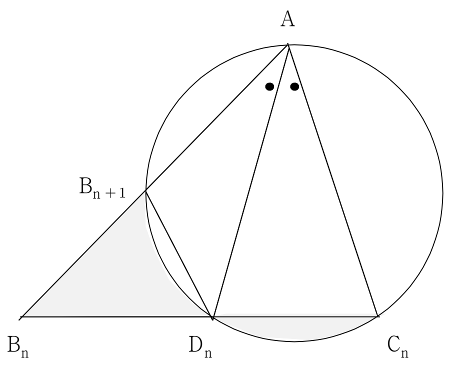
정답 ④

20. 출제의도 : 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n = \angle D_nAC_n$이므로 $\overset{\frown}{B_{n+1}D_n} = \overset{\frown}{D_nC_n}$ 이다

따라서, $\overline{B_{n+1}D_n} = \overline{D_nC_n}$ 이므로 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과 호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와 같다.



R_n

그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3} = 7$$

즉, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$

또한, $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점이 D_1이므로

$$\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} = 3:2$$

따라서,

$$\overline{B_1D_1} = \frac{3\sqrt{7}}{5},\quad \overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

또한, 삼각형 AD_1C_1의 외접원의 중심을 O라 하면 $\angle D_1OC_1 = \angle B_2OD_1 = \frac{\pi}{3}$이므로 두 삼각형 D_1OC_1, B_2OD_1은 모두 정삼각형이고 $\angle B_2D_1C_1 = \frac{2}{3}\pi$이다.

따라서, $\angle B_2D_1B_1 = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$$

또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{91}{25} - \frac{42}{25} = \frac{49}{25}$$

이므로

$$\overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$$

따라서, $\overline{AB_2} = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$ 이므로

$$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 3 : \frac{8}{5} = 1 : \frac{8}{15}$$

이때, 넓이의 비는 $1 : \frac{64}{225}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

정답 ①

21. 출제의도 : 로그의 성질과 시그마의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{m} a_k$

$= \sum_{k=1}^{m} \log_2 \sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \log_2 \frac{2(k+1)}{k+2}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \log_2 \frac{2\times2}{3} + \log_2 \frac{2\times3}{4} + \log_2 \frac{2\times4}{5} + \cdots + \log_2 \frac{2\times(m+1)}{m+2} \right\}$

$= \frac{1}{2} \log_2 \left\{ \frac{2\times2}{3} \times \frac{2\times3}{4} \times \frac{2\times4}{5} \times \cdots \times \frac{2\times(m+1)}{m+2} \right\}$

$= \frac{1}{2} \log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = N$(N은 100 이하의 자연수)

라 하면

$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} = N$

$\frac{2^{m+1}}{m+2} = 2^{2N}$

$2^{m+1-2N} = m+2$

따라서 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(i) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때

$2^{3-2N} = 2^2$

$3-2N=2$, $N=\frac{1}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m \neq 2$

(ii) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때

$2^{7-2N} = 2^3$

$7-2N=3$, $N=2$

(iii) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때

$2^{15-2N} = 2^4$

$15-2N=4$, $N=\frac{11}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m \neq 14$

(iv) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때

$2^{31-2N} = 2^5$

$31-2N=5$, $N=13$

(v) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때

$2^{63-2N} = 2^6$

$63-2N=6$, $N=\frac{57}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m \neq 62$

(vi) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때

$2^{127-2N} = 2^7$

$127-2N=7$, $N=60$

(vii) $m+2 \geq 2^8$일 때

$N > 100$

(i) ~ (vii)에서

$m=6$, 30, 126

따라서 모든 m의 값의 합은

$6+30+126=162$

정답 ④

22. **출제의도** : 이항정리를 알고 있는가?

정답풀이 :

$(1+2x)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_k(2x)^k = {}_4\mathrm{C}_k 2^k x^k$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$)

이므로 x^2의 계수는 $k=2$일 때

${}_4\mathrm{C}_2 \times 2^2 = 6\times4=24$

정답 24

23. **출제의도** : 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}=2\times15$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AC}}=30\times\sin B=30\times\frac{7}{10}=21$$

정답 21

24. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열에서 조건을 만족시키는 항의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_3=a_2-a_1=-6$

$a_4=a_3-a_2=-9$

$a_5=a_4-a_3=-3$

$a_6=a_5-a_4=6$

$a_7=a_6-a_5=9$

$a_8=a_7-a_6=3$

$\cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6, …이 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$ 이 성립한다.

이때, 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$ 이므로 구하는 100이하의 자연수 k의 개수는

$16\times2+1=33$

정답 33

25. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(a, 0)$는 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점이므로 $a^3=1$에서

$a=1$

$x^3-y^3=e^{xy}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\frac{dy}{dx}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}\ (\text{단, } xe^{xy}+3y^2\neq0)$$

따라서 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$b=\frac{3-0}{1+0}=3$$

따라서

$a+b=1+3=4$

정답 4

26. 출제의도 : 등차수열의 합을 이용하여 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}$

$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$이므로

$a_{k+2}+a_{k+1}=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4$

$a_1+2k=1$

$a_1=1-2k$ …… ㉠

$S_k=-16$에서

$$\frac{k\{2a_1+(k-1)\times2\}}{2}=-16$$

$k(a_1+k-1)=-14$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k\{(1-2k)+k-1\}=-16$

$k^2 = 16$

k는 자연수이므로

$k = 4$

$k = 4$를 ㉠에 대입하면

$a = -7$

따라서

$a_{2k} = a_8 = -7 + 7 \times 2 = 7$

정답 7

27. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니에 있는 8개의 공 중에서 4개의 공을 임의로 꺼내는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 경우는 3이 적힌 공이 두 개 또는 4가 적힌 공이 두 개 또는 3, 3, 4, 4 가 적힌 공이 나오는 경우이다.

이때, 3이 적힌 공이 두 개 나오는 경우는 나머지 여섯 개의 공 중에서 두 개의 공을 꺼낼 때 4가 적힌 공 두 개가 나오는 경우를 빼면 되므로

${}_6\mathrm{C}_2 - 1 = 15 - 1 = 14$

따라서, 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 경우의 수는

$14 \times 2 + 1 = 29$

또한, 3이 적힌 공이 두 개 나온 경우 중 검은 공이 두 개인 경우는 나머지 검은 공 중 4가 적힌 공을 제외한 두 개의 공 중 한 개를 꺼내고 흰 공 3개 중에서 한 개를 꺼내거나 나머지 검은 공 중 4가 적힌 공을 꺼내고 흰 색 공 중 4를 제외한 두 개의 공 중에서 한 개의 공을 꺼내면 되므로

${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 + 1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 6 + 2 = 8$

따라서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같으면서 검은 공의 개수가 두 개인 경우의 수는

$2({}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 + 1 \times {}_2\mathrm{C}_1) + 1 = 17$

이때 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 사건을 A, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{17}{70}}{\frac{29}{70}} = \frac{17}{29}$$

따라서 $p = 29$, $q = 17$ 이므로

$p + q = 46$

정답 46

28. 출제의도 : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내고 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 BMH에서

$\overline{\mathrm{MB}} = 1$

$\sin\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{MH}}}{\overline{\mathrm{MB}}}$에서

$\overline{\mathrm{MH}} = \overline{\mathrm{MB}} \times \sin\theta = \sin\theta$

삼각형 DMC에서

$\overline{\mathrm{MD}} = \overline{\mathrm{MH}} = \sin\theta$,

$\overline{\mathrm{MC}} = 1$,

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{DMC} &= \pi - \angle\mathrm{DMB} \\ &= \pi - \angle\mathrm{AMB} \\ &= \pi - \frac{\pi - \theta}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\triangle\mathrm{DMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MD}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle DMC)$$
$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$

삼각형 HMC에서

$\overline{\mathrm{MH}}=\sin\theta$,

$\overline{\mathrm{MC}}=1$,

$$\angle\mathrm{HMC}=\pi-\angle\mathrm{HMB}$$
$$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+\theta$$

이므로

$$\triangle\mathrm{HMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MH}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle HMC)$$
$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

이때

$f(\theta)-g(\theta)$

$$=\triangle\mathrm{DMC}-\triangle\mathrm{HMC}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left\{\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\left(1^2-\frac{1}{4}\times1^2\right)\times\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{3}{16}$$

따라서 $a=\frac{3}{16}$이므로

$$80a=80\times\frac{3}{16}=15$$

정답 15

<참고>

삼각형 HMC의 넓이는 직각삼각형 HBM의 넓이와 같다.

$$\triangle\mathrm{HMC}=\triangle\mathrm{HBM}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

29. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

2명의 학생을 A, B라 하고 두 학생 A, B가 받는 볼펜의 개수를 (A, B)로 나타내면

(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)

의 6가지이다.
또한, A, B학생에게 나눠 준 검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜의 개수를 각각 a, b, c라 하면
$a+b+c=5$
(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 4$)
이다.
(i) (5, 0)인 경우
① $a=0$이면 $b+c=5$에서
순서쌍 (b,c)의 개수는 (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)의 4이다.
② $a=1$ 이면 $b+c=4$ 이므로
순서쌍 (b,c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_4 = {}_{2+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$
(ii) (4, 1)인 경우
① B에게 검은 볼펜을 나눠 준 경우
$b+c=4$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 5이다.
② B에게 파란색 볼펜을 나눠 준 경우
$a+b+c=4$
(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 4$)
이고
㉠ $a=0$ 이면 $b+c=4$ 이므로
순서쌍 (b,c)의 개수는 (3, 1), (2, 2) (1, 3), (0, 4)의 4이다.
㉡ $a=1$ 이면 $b+c=3$ 이므로
순서쌍 (b,c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_3 = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_3 = 4$
③ B에게 빨간색 볼펜을 나눠 준 경우도 (ii) ②와 같다.
(iii) (3, 2)인 경우
① B에게 검은색, 파란색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우
$b+c=3$ (단, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 4$)
이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 4이다.
② B에게 검은색, 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우도 (iii) ①과 같다.
③ B에게 파란색, 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우
$a+b+c=3$
(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 3$)
㉠ $a=0$ 이면 $b+c=3$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 4이다.
㉡ $a=1$ 이면 $b+c=2$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_2 = {}_{2+2-1}\mathrm{C}_2 = 3$
④ B에게 파란색 볼펜을 2개 나눠 준 경우
$a+b+c=3$
(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 4$)
㉠ $a=0$이면 $b+c=3$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 (2, 1), (1, 2), (0, 3)의 3이다.
㉡ $a=1$이면 $b+c=2$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 3이다.
⑤ B에게 빨간색 볼펜을 2개 나눠 준 경우는 (iii) ④의 경우와 같다.
또한, (2, 3), (1, 4), (0, 5)인 경우는 각각 (3, 2), (4, 1), (5, 0)인 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는
$2\{(4+5)+(5+8\times2)+(4\times2+7+3\times2\times2)\}$
$=2\times(9+21+27)$
$=2\times57$
$=114$

정답 114

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법과 미분가능성의 정의를 알고 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(2^x)$에서 $p(x)=2^x$이라 하면 함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이다.
한편, 자연수 m에 대하여

$3m-3<x<3m-2$일 때

$$f'(x)=-2$$

$3m-2<x<3m-1$일 때,

$$f'(x)=0$$

$3m-1<x<3m$일 때,

$$f'(x)=2$$

이고,

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(p(x+h))-f(p(x))}{h}\right|$$
$$=|f'(p(x))\times p'(x)|$$
$$=|f'(p(x))|\times 2^x\ln 2$$
$$=|f'(2^x)|\times 2^x\ln 2$$

이므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

(i) $3m-3\le 2^x<3m-2$일 때

$g(x)=|f'(2^x)|\times 2^x\ln 2=2\ln 2\times 2^x$

(ii) $3m-2\le 2^x<3m-1$일 때,

$g(x)=|f'(2^x)|\times 2^x\ln 2=0\times 2^x=0$

(iii) $3m-1\le 2^x<3m$일 때,

$g(x)=|f'(2^x)|\times 2^x\ln 2=2\ln 2\times 2^x$

이때

$$\lim_{x\to\log_2(3m-2)-}g(x)\ne\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x),$$
$$\lim_{x\to\log_2(3m-1)-}g(x)\ne\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x),$$
$$\lim_{x\to(\log_2 3m)-}g(x)=\lim_{x\to(\log_2 3m)+}g(x)=g(\log_2 3m)$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2(3m-2)$와 $x=\log_2(3m-1)$에서 불연속이다.

그런데 $-5<x<5$에서

$$\frac{1}{32}<2^x<32$$

이므로 함수 $g(x)$는

$x=\log_2 k\ \ (k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

에서 불연속이다.

즉,

$a_k=\log_2 k\ \ (k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

이므로

$n=31-10=21$

이고, $g(a_k)$는 다음과 같다.

(i) $2^{a_k}=3m-2$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-2<2^x<3m-1$일 때 $g(x)=0$이므로

$$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)=0$$

(ii) $2^{a_k}=3m-1$, 즉 $a_k=\log_2(3m-1)$일 때

$3m-1<2^x<3m$일 때 $g(x)=2\ln 2\times 2^x$이므로

$$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)=2\ln 2\times(3m-1)$$

이상에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=\sum_{k=1}^{21}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$$
$$=2(2+5+8+11+14+\cdots+29)$$
$$=2\times\frac{10(2+29)}{2}=310$$

따라서

$$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+310=331$$

정답 331

다른풀이 :

함수 $f(x)$는

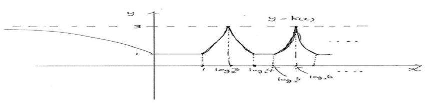
$$f(x)=\begin{cases}\quad\vdots & \\ -2x+3 & (0\le x<1)\\ \quad 1 & (1\le x<2)\\ 2x-3 & (2\le x<3)\\ -2(x-3)+3 & (3\le x<4)\\ \quad 1 & (4\le x<5)\\ 2(x-3)-3 & (5\le x<6)\\ -2(x-6)+3 & (6\le x<7)\\ \quad 1 & (7\le x<8)\\ 2(x-6)-3 & (8\le x<9)\\ \quad\vdots & \end{cases}$$

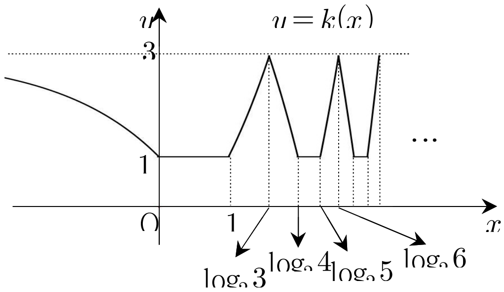
이다.

$k(x)=f(2^x)$이라 하면

$$k(x)=f(2^x)=\begin{cases}-2\times2^x+3 & (x<\log_2 1)\\ 1 & (\log_2 1\le x<\log_2 2)\\ 2\times 2^x-3 & (\log_2 2\le x<\log_2 3)\\ -2(2^x-3)+3 & (\log_2 3\le x<\log_2 4)\\ 1 & (\log_2 4\le x<\log_2 5)\\ 2(2^x-3)-3 & (\log_2 5\le x<\log_2 6)\\ -2(2^x-6)+3 & (\log_2 6\le x<\log_2 7)\\ 1 & (\log_2 7\le x<\log_2 8)\\ 2(2^x-6)-3 & (\log_2 8\le x<\log_2 9)\\ \vdots & \end{cases}$$

이므로 함수 $y=k(x)$의 그래프는 그림과 같다.





이때

$$k'(x)=\begin{cases}-2\times2^x\times\ln 2 & (x<\log_2 1)\\ 0 & (\log_2 1<x<\log_2 2)\\ 2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 2<x<\log_2 3)\\ -2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 3<x<\log_2 4)\\ 0 & (\log_2 4<x<\log_2 5)\\ 2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 5<x<\log_2 6)\\ -2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 6<x<\log_2 7)\\ 0 & (\log_2 7<x<\log_2 8)\\ 2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 8<x<\log_2 9)\\ \vdots & \end{cases}$$

이고

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|k(x+h)-k(x)|}{h}$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}-2\times2^x\times\ln 2 & (x<\log_2 1)\\ 0 & (\log_2 1\le x<\log_2 2)\\ 2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 2\le x<\log_2 4)\\ 0 & (\log_2 4\le x<\log_2 5)\\ 2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 5\le x<\log_2 7)\\ 0 & (\log_2 7\le x<\log_2 8)\\ 2\times2^x\times\ln 2 & (\log_2 8\le x<\log_2 10)\\ \vdots & \end{cases}$$

이다.

이때

$$\lim_{x\to\log_2(3m-2)-}g(x)\neq\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x),$$

$$\lim_{x\to\log_2(3m-1)-}g(x)\neq\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x),$$

$$\lim_{x\to(\log_2 3m)-}g(x)=\lim_{x\to(\log_2 3m)+}g(x)=g(\log_2 3m)$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2(3m-2)$와 $x=\log_2(3m-1)$에서 불연속이다.

그런데 $-5<x<5$에서

$\dfrac{1}{32}<2^x<32$이므로 함수 $g(x)$는

$x=\log_2 k\ \ (k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

에서 불연속이다.

즉, $a_k=\log_2 k\ \ (k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

이므로

$n=31-10=21$

이고, $g(a_k)$는 다음과 같다.

(i) $2^{a_k}=3m-2$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-2<2^x<3m-1$일 때 $g(x)=0$이므로

$$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)=0$$

(ii) $2^{a_k}=3m-1$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-1<2^x<3m$일 때 $g(x)=2\ln2\times2^x$이므로

$$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)=2\ln2\times(3m-1)$$

이상에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}=\sum_{k=1}^{21}\frac{g(a_k)}{\ln2}$$

$$=2(2+5+8+11+14+\cdots+29)$$

$$=2\times\frac{10(2+29)}{2}=310$$

따라서

$$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}=21+310=331$$