01 부정적분

부정적분

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

를 만족시키는 임의의 $F(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분이라고 한다.

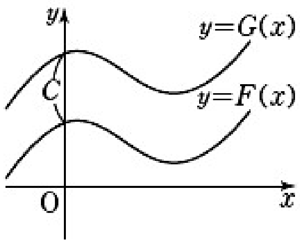
$$F(x)+C \underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}} f(x)$$

따라서 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 부정적분은 $F(x)+C$ (C는 상수) 로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad (C\text{는 적분상수})$$

와 같이 나타낸다.
함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

▷ 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $F(x)$이고, $G(x)$가 $f(x)$의 또 다른 부정적분이면 $F'(x) = G'(x) = f(x)$가 성립하므로



$$\{G(x)-F(x)\}' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

이때 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$$G(x)-F(x) = C$$
$$G(x) = F(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

가 된다. 따라서 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면 함수 $f(x)$의 부정적분은 $F(x)+C$ (C는 상수) 형태로 나타낼 수 있다.

등식 $\int f(x)dx = 3x^2+C$ (C는 상수)를 만족하는 함수 $f(x)$를 구하시오.

$(3x^2+C)' = f(x)$가 되어야 하므로 $f(x) = 6x$가 된다.

부정적분과 미분의 관계

1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

▷ $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면 $\int f(x)dx=F(x)+C$가 된다.

양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\dfrac{d}{dx}\{F(x)+C\}=\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$

▷ $\dfrac{d}{dx}f(x)=f'(x)$이므로 $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\int f'(x)dx=f(x)+C$가 된다.

함수 $f(x)=x^3+3x$에 대하여 $F(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}$일 때, $F(1)$의 값을 구하시오.

$F(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)=x^4+3x^2$

$\therefore\ F(1)=1+3=4$

다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

$$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-x+1)\right\}dx,\quad f(0)=1$$

$f(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2-x)\right\}dx=x^2-x+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+1$

함수 $y=x^n$ (n은 자연수)의 부정적분

n이 자연수일 때,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

▷ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right) = \dfrac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n = x^n$

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int x^5 dx$

(2) $\int 1 dx$

(1) $\int x^5 dx = \dfrac{1}{5+1}x^{5+1} + C = \dfrac{1}{6}x^6 + C$ (C는 상수)

(2) $\int 1\, dx = x + C$ (C는 상수)

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때,

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k는 0이 아닌 상수)

2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

▷ 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(x) = \int f(x)dx, \qquad F'(x) = f(x)$$

$$G(x) = \int g(x)dx, \qquad G'(x) = g(x)$$

1) k를 상수라고 하면 $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$이므로

$$kF(x) = \int kf(x)dx$$

이때, $kF(x) = k\int f(x)dx$이므로 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

2) $\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$이므로

$$F(x)+G(x) = \int \{f(x)+g(x)\}dx$$

이때, $F(x)+G(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3) 2)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

▷ x^n의 부정적분, 1의 부정적분, 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 이용하면 다항함수의 부정적분을 구해낼 수 있다.

▷ 부정적분 함수를 구하는 과정에서 적분상수가 여러 개 나올 때는 모든 적분상수의 합을 하나의 적분상수로 나타낸다.

$$\int 3x^2dx + \int xdx = (x^3 + C_1) + \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

부정적분 $\int (2x^2+3x-4)dx$를 구하시오.

$$\int (2x^2+3x-4)dx = \int 2x^2dx + \int 3xdx - \int 4dx$$

$$= 2\int x^2dx + 3\int xdx - 4\int 1dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) - 4(x + C_3)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + (2C_1 + 3C_2 - 4C_3)$$

여기서 $(2C_1+3C_2-4C_3)=C$라고 하면

$$\int (2x^2+3x-4)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$$

다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하시오.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 5,\ f(0) = -1$$

$f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$$f(x) = \int (6x^2-2x+5)dx = 2x^3 - x^2 + 5x + C$$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

$\therefore\ f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$

02 정적분

정적분의 정의

함수 $f(x)$가 a, b를 포함하는 열린구간에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분 중 하나인 $F(x)$에 대하여 $F(b)-F(a)$를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

이때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

▷ 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 할 때, $F(b)-F(a)$는 적분상수 C와는 관계없이 항상 일정한 값이 나온다. 따라서 정적분에서는 적분상수 C를 생략한다.

$$\Big[F(x)+C\Big]_a^b = F(b)+C-F(a)-C = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

▷ 정적분 $\int_a^b f(x)dx$에서 a를 아래끝, b를 위끝이라고 한다.

▷ 정적분은 a, b의 대소에 관계없이 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$로 정의한다.

▷ 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 함수 $f(x)$와 아래끝 a, 위끝 b만으로 결정되는 상수이므로 적분변수와는 관계가 없다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

▷ 부정적분 $\int f(x)dx$의 결과는 함수이므로 적분변수가 다르면 서로 다른 함수가 된다.

$$\int f(x)dx \neq \int f(y)dy \neq \int f(t)dt \neq \int f(u)du \neq \cdots$$

정적분 $\int_{-1}^{2}(3x^2+6x-1)dx$의 값을 구하시오.

$$\int_{-1}^{2}(3x^2+6x-1)dx = \left[x^3+3x^2-x\right]_{-1}^{2} = (8+12-2)-(-1+3+1)=15$$

함수 $f(x)$가 a, b를 포함하는 열린구간에서 연속일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 할 때,

(1) $\int_a^a f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^a = F(a)-F(a)=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a) = -\left\{F(a)-F(b)\right\} = -\left[F(x)\right]_b^a$

$$= -\int_b^a f(x)dx$$

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_4^4 (x^2+2x-5)dx$

(2) $\int_2^0 (2x+3)dx$

(1) $\int_4^4 (x^2+2x-5)dx = 0$

(2) $\int_2^0 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_2^0 = 0-(4+6) = -10$

정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 a를 포함하는 열린구간에서 연속이고, x가 그 열린구간에 속하는 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

▷ 함수 $f(t)$의 부정적분 중 하나를 $F(t)$라고 할 때 정적분의 정의에 의하여 $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 이다. 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt = x^3 - x^2 - x - 2$를 만족할 때, 상수 a의 값과 함수 $f(x)$를 각각 구하시오.

주어진 등식의 양변에 $x = a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt = a^3 - a^2 - a - 2 = 0$

$a^3 - a^2 - a - 2 = (a-2)(a^2 + a + 1) = 0 \qquad \therefore\ a = 2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 - x - 2) \qquad \therefore\ f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 a, b를 포함하는 열린구간에서 연속일 때,

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)

2) $\int_a^b \left\{f(x)+g(x)\right\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b \left\{f(x)-g(x)\right\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

▷ 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분 중 하나를 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

1) $$\int_a^b kf(x)dx = \Big[kF(x)\Big]_a^b = kF(b)-kF(a) = k\{F(b)-F(a)\} = k\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$= k\int_a^b f(x)dx$$

2) $$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b = \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} = \Big[F(x)\Big]_a^b + \Big[G(x)\Big]_a^b$$
$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3) 2)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

정적분 $\int_1^2 (-x^3+2x^2+3x+1)dx + \int_1^2 (x^3+x^2-3x-3)dx$의 값을 구하시오.

$$\int_1^2 (-x^3+2x^2+3x+1)dx + \int_1^2 (x^3+x^2-3x-3)dx$$
$$= \int_1^2 (-x^3+2x^2+3x+1+x^3+x^2-3x-3)dx$$
$$= \int_1^2 (3x^2-2)dx = 3\int_1^2 x^2 dx - 2\int_1^2 1dx$$
$$= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - 2\Big[x\Big]_1^2 = 3\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)-2(2-1)$$
$$= 7-2=5$$

정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 $a,\ b,\ c$를 포함하는 열린구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

▷ 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b \\ &= \{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\} \\ &= F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

정적분 $\int_1^2 (2x^2+4)dx + \int_2^3 (2x^2+4)dx$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}&\int_1^2 (2x^2+4)dx + \int_2^3 (2x^2+4)dx \\ &\quad = \int_1^3 (2x^2+4)dx = 2\int_1^3 x^2dx + 4\int_1^3 1dx \\ &\quad = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 + 4\Big[x\Big]_1^3 = 2\left(9-\frac{1}{3}\right)+4(3-1) \\ &\quad = \frac{76}{3}\end{aligned}$$

정적분 $\int_0^3 \left| x^2-6x+8 \right| dx$의 값을 구하시오.

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $\left| x^2-6x+8 \right| = \begin{cases} x^2-6x+8 & (0 \le x < 2) \\ -x^2+6x-8 & (2 \le x \le 3) \end{cases}$이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left| x^2-6x+8 \right| dx &= \int_0^2 \left| x^2-6x+8 \right| dx + \int_2^3 \left| x^2-6x+8 \right| dx \\ &= \int_0^2 (x^2-6x+8) dx + \int_2^3 (-x^2+6x-8) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 12 + 16 \right) + \left(-9 + 27 - 24 + \frac{8}{3} - 12 + 16 \right) \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

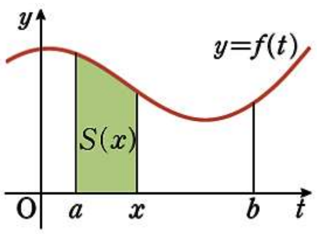
01 도형의 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

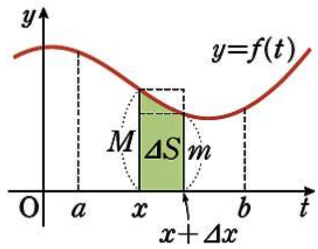
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

▷ 함수 $y=f(t)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\ge 0$이라고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 하자. 이때, x의 증분 Δx에 대하여 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면



$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이다.



한편, $\Delta x>0$일 때, 함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 연속이기 때문에 최대・최소의 정리에 의해 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 그 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면

$$m\Delta x\le \Delta S\le M\Delta x$$

이고, 양변을 Δx로 나누면 $m\le \dfrac{\Delta S}{\Delta x}\le M$이 된다.

여기서 $\Delta x\to 0+$이면

$$\lim_{\Delta x\to 0+} m\le \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta S}{\Delta x}\le \lim_{\Delta x\to 0+} M$$

이 성립한다. 함수 $f(t)$는 $[a,\ b]$에서 연속함수이므로 $\Delta x\to 0+$이면 $m\to f(x)$, $M\to f(x)$이 되고 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$$

마찬가지 방법으로 $\Delta x<0$일 때도 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $S'(x) = \dfrac{d}{dx}S(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ 가 되어 $S(x)$가 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 되는 것을 알 수 있다. 결국

$$S(x) - S(a) = \int_a^x f(t)dt$$

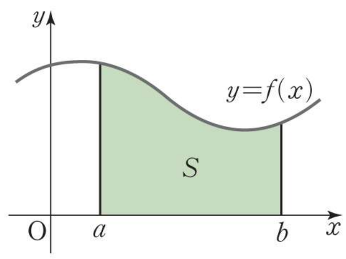
이다.

위 식에 $x = b$를 대입하면 $S(b) - S(a) = \int_a^b f(t)dt$가 되는데,

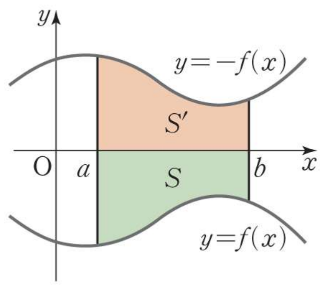
$S(b) = S$, $S(a) = 0$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$이므로

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

가 된다.

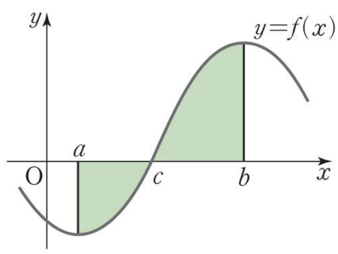


▷ 함수 $y = f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x) \le 0$이면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = -f(x)$ 는 곡선 $y = f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고 $-f(x) \ge 0$이 된다. 따라서 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S와 곡선 $y = -f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'는 서로 같다. 따라서 다음이 성립한다.



$$S = S' = \int_a^b \{-f(x)\}dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

▷ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ c]$에서는 $f(x) \le 0$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서는 $f(x) \ge 0$이면 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{-f(x)\}dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx \\ &= \int_a^b |f(x)|dx \end{aligned}$$

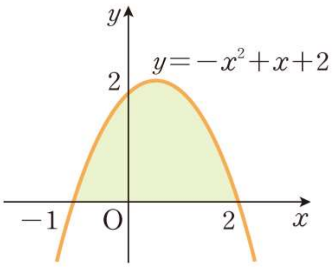
곡선 $y=-x^2+x+2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+x+2=0$에서

$-(x+1)(x-2)=0$, 즉 $x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 2]$에서 $-x^2+x+2 \geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$



곡선 $y=x^2-3x$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

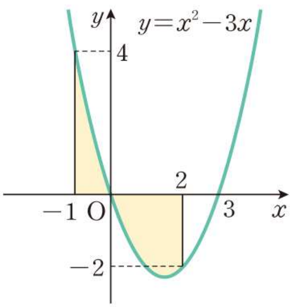
주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$, 즉 $x=0$ 또는 $x=3$

이때 구간 $[-1, 0]$에서 $x^2-3x \geq 0$이고,

구간 $[0, 2]$에서 $x^2-3x \leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}=\frac{31}{6}$$



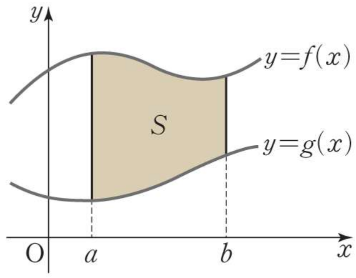
두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

▷ 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $0 \le g(x) \le f(x)$일 때

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \end{aligned}$$

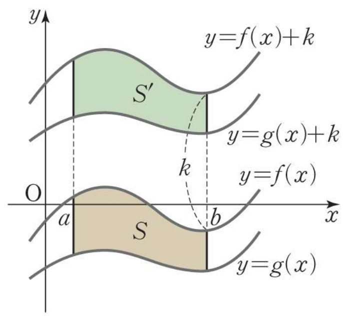


▷ 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $g(x) \le f(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$가 음의 값을 가질 때

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 실수 k만큼 평행이동하여

$$0 \le g(x)+k \le f(x)+k$$

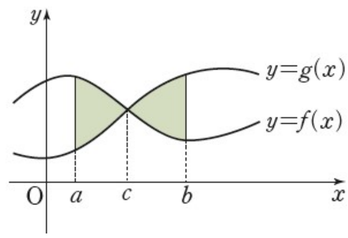
가 성립되도록 한다. 이때, 평행이동하여도 구하는 도형의 넓이가 변하지 않으므로 넓이 S는 다음과 같이 구할 수 있다.



$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{f(x)+k\}\,dx - \int_a^b \{g(x)+k\}\,dx \\ &= \int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]\,dx \\ &= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \end{aligned}$$

▷ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서는 $f(x) \geq g(x)$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서는 $f(x) \leq g(x)$일 때

$$S = \int_a^c \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$
$$= \int_a^c |f(x) - g(x)|\,dx + \int_c^b |f(x) - g(x)|\,dx$$
$$= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



두 곡선 $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -x^2 + 4x + 1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

두 곡선의 교점의 x좌표는

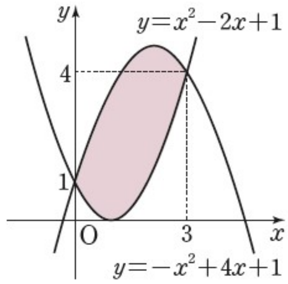
$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1$, $2x(x-3) = 0$

즉, $x = 0$ 또는 $x = 3$

구간 $[0,\ 3]$에서 $-x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$이므로

구하는 넓이 S는

$$S = \int_0^3 \{(-x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\}\,dx$$
$$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 = 9$$



$0 \leq x \leq 2$일 때, 곡선 $y=-x^2+2x+2$와 직선 $y=2x+1$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$$-x^2+2x+2=2x+1,\ (x+1)(x-1)=0$$

즉, $x=-1$ 또는 $x=1$

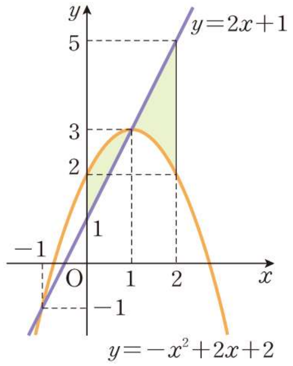
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1\{(-x^2+2x+2)-(2x+1)\}dx$$

$$+\int_1^2\{(2x+1)-(-x^2+2x+2)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^2(x^2-1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2=2$$



02 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점의 위치

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$라고 하면

1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량

$$\int_a^b v(t)dt$$

2) 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치를 x_0라고 할 때, $t=b$에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^b v(t)dt$$

▷ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $f(t)$라고 하면 시각 $t=a$ 에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $f(b)-f(a)$가 된다. 또한 $v(t)$와 $f(t)$사이에 다음과 같은 관계가 성립함을 알고 있다.

$$v(t)=f'(t)$$

즉, $f(t)$는 $v(t)$의 부정적분 중 하나이고 정적분의 정의에 의하여

$$f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$

임을 알 수 있다.

▷ 따라서 $t=b$에서의 위치 $f(b)$는 $f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)dt$로 구할 수 있고, $x_0=f(a)$, $x=f(b)$이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$x=x_0+\int_a^b v(t)dt$$

좌표가 1인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=2t^2+t+3$$

일 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량
(2) 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치

(1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (2t^2+t+3)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+3t\right]_0^3=18+\frac{9}{2}+9=\frac{63}{2}$$

(2) 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^3 (2t^2+t+3)dt=1+\frac{63}{2}=\frac{65}{2}$$

수직선 위를 움직이는 점의 이동 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$라고 할 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

▷ 시각 t에서의 점 P의 위치를 $f(t)$라고 하면

(1) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t) \geq 0$일 때

속도 $v(t) \geq 0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직이므로 점 P가 움직인 거리는

$$f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt=\int_a^b |v(t)|dt$$

(2) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t) \leq 0$일 때

속도 $v(t) \leq 0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직이므로 점 P가 움직인 거리는

$$f(a)-f(b)=-\int_a^b v(t)dt=\int_a^b |v(t)|dt$$

(3) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t)$가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때

속도 $v(t)$각 양, 음인 구간을 나누어 (1), (2)에서와 같이 움직인 거리를 구하면 되므로

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

지상으로부터 $10\,\mathrm{m}$의 높이에서 $49\,\mathrm{m/s}$의 속도로 똑바로 위로 쏘아 올린 로켓의 t초 후의 속도는 $v(t)=49-9.8t(\mathrm{m/s})$라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 로켓이 도달할 수 있는 최고 높이
(2) 로켓을 쏘아 올린 후 10초 동안 로켓이 실제로 움직인 거리

(1) 로켓이 최고 높이에 도달하는 것은 속도가 0이 될 때이므로 $t=5$일 때 최고 높이에 도달하게 된다. 그 때의 높이는

$$10+\int_0^5(49-9.8t)\,dt=10+\Big[49t-4.9t^2\Big]_0^5$$
$$=10+245-122.5=132.5(\mathrm{m})$$

(2) $0\le t\le 5$일 때 $v(t)\ge 0$, $t\ge 5$일 때 $v(t)\le 0$이므로
10초 동안 로켓이 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^{10}|49-9.8t|dt=\int_0^5(49-9.8t)dt+\int_5^{10}(9.8t-49)dt$$
$$=\Big[49t-4.9t^2\Big]_0^5+\Big[4.9t^2-49t\Big]_5^{10}=245(\mathrm{m})$$