# 정답 및 해설



## 수학 영역

### 정 답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ④ | 3 | ③ | 4 | ⑤ | 5 | ② |
| 6 | ⑤ | 7 | ④ | 8 | ③ | 9 | ① | 10 | ② |
| 11 | ⑤ | 12 | ① | 13 | ② | 14 | ③ | 15 | ① |
| 16 | ③ | 17 | ① | 18 | ④ | 19 | ③ | 20 | ⑤ |
| 21 | ④ | 22 | 10 | 23 | 16 | 24 | 4 | 25 | 8 |
| 26 | 13 | 27 | 50 | 28 | 24 | 29 | 96 | 30 | 28 |

### 해 설

**1. [출제의도] 다항식 계산하기**
$A-B=(x^2+5x+4)-(x^2+2)=5x+2$

**2. [출제의도] 복소수 계산하기**
$(2+i)+(2-3i)=(2+2)+\{1+(-3)\}i=4-2i$

**3. [출제의도] 이차방정식 계산하기**
이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을
$D$라 하면 $D=36-4a=0$
따라서 $a=9$

**4. [출제의도] 나머지정리 이해하기**
$f(x)=x^3-x^2+3$이라 하면
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(2)=8-4+3=7$

**5. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기**
직선 $2x+y+5=0$을 $x$축의 방향으로 2만큼,
$y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 직선의
방정식은 $2(x-2)+(y+1)+5=0$
$2x+y+2=0$
따라서 $a=2$

**6. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기**
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=7$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\times7=22$

**7. [출제의도] 인수분해 이해하기**
조립제법을 활용하여 $x^3+3x^2-x-3$을
인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2+4x+3)=(x-1)(x+1)P(x)$
$(x-1)(x+1)(x+3)=(x-1)(x+1)P(x)$
$P(x)=x+3$
따라서 $P(1)=1+3=4$

**8. [출제의도] 연립방정식 이해하기**
$\begin{cases} x-y-1=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=x-1$을 ㉡에 대입하면
$x^2-x(x-1)+2(x-1)=4$
$x+2x-2=4$
$\alpha=2$, $\beta=1$
따라서 $\alpha+\beta=2+1=3$

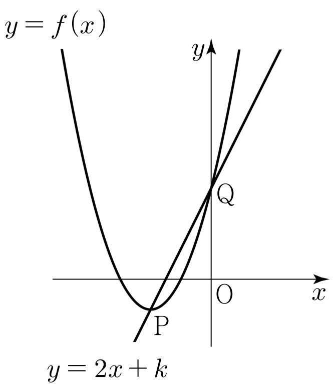
**9. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기**
기울기가 5인 직선의 $y$절편을 $k$라 하면
이차함수 $f(x)=x^2-3x+17$의 그래프와
직선 $y=5x+k$가 한 점에서 만난다.
이차방정식 $x^2-8x+17-k=0$의 판별식을
$D$라 하면 $D=64-4(17-k)=0$
따라서 직선의 $y$절편은 1

**10. [출제의도] 복소수 이해하기**
$\dfrac{2a}{1-i}+3i=2+bi$
$\dfrac{2a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+3i=2+bi$
$a(1+i)+3i=2+bi$
$a+(a+3)i=2+bi$
$a=2$, $b=5$
따라서 $a+b=2+5=7$

**11. [출제의도] 나머지정리 이해하기**
$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$f(1)=1+a+b=6$ ⋯ ㉠
$f(3)=9+3a+b=6$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $a=-4$, $b=9$
$f(x)=x^2-4x+9$
따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의
나머지는 $f(4)=16-16+9=9$

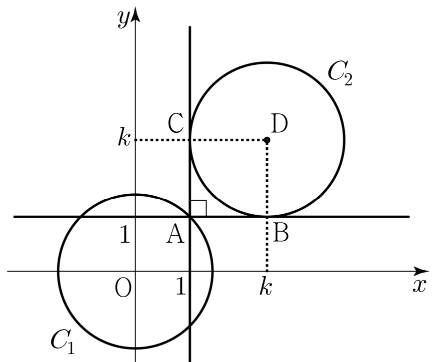
**12. [출제의도] 선분의 내분을 활용하여 문제 해결하기**
삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비는
$2:1$이므로 $\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:1$
점 O는 선분 BA를 $2:1$로 내분하는 점이다.
$0=\dfrac{a+6}{3}$, $a=-6$
$0=\dfrac{b+2}{3}$, $b=-2$
따라서 $a+b=(-6)+(-2)=-8$

**13. [출제의도] 이차함수의 그래프 이해하기**
$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$
직선 $y=2x+k$가 점 P$(-2,\ -1)$을 지나므로
$-1=2\times(-2)+k$, $k=3$
$x^2+4x+3=2x+3$
$x^2+2x=x(x+2)=0$
그러므로 점 Q의 좌표는 Q$(0,\ 3)$
따라서 선분 PQ의 길이는
$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$




**14. [출제의도] 이차부등식을 활용하여 문제 해결하기**
$x^2-(n+5)x+5n\le 0$
$(x-n)(x-5)\le 0$
(ⅰ) $n<5$일 때,
부등식의 해는 $n\le x\le 5$
정수 $x$의 개수는 $6-n$이므로 $6-n=3$
$n=3$
(ⅱ) $n=5$일 때,
$(x-5)^2\le 0$의 해는 $x=5$
정수 $x$의 개수는 1이므로 성립하지 않는다.
(ⅲ) $n>5$일 때,
부등식의 해는 $5\le x\le n$
정수 $x$의 개수는 $n-4$이므로 $n-4=3$
$n=7$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
모든 자연수 $n$의 값의 합은 $3+7=10$

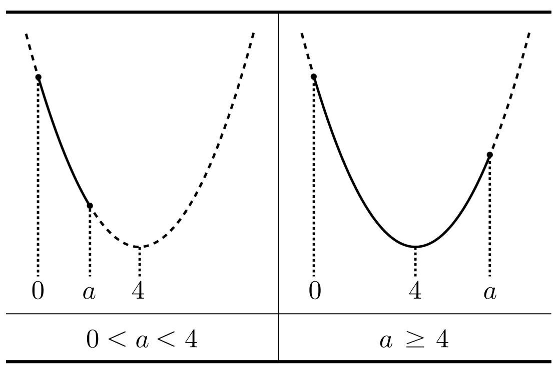
**15. [출제의도] 도형의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기**




점 A$(1,\ 1)$에서 원 $C_2$에 그은 두 접선이
원 $C_2$와 만나는 점을 각각 B, C라 하고,
원 $C_2$의 중심을 D$(k,\ k)$라 하자.
사각형 ABDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인
정사각형이다.
$k>2$이므로 $k=1+\sqrt{2}$

**16. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기**
직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+3$
직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한
직선 A$'$B의 방정식은 $y=2x-6$
점 C와 직선 A$'$B 사이의 거리는
점 C와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.
$\dfrac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\times 2$
$0<k<3$이므로 $k+6=2(-2k+6)$
따라서 $k=\dfrac{6}{5}$

**17. [출제의도] 이차함수의 최솟값 추론하기**
$f(x)=x^2-8x+a+6=(x-4)^2+a-10$
$a$의 값에 따른 $y=f(x)$의 그래프의 개형은
다음과 같다.




(ⅰ) $0<a<4$일 때,
최솟값은 $f(a)=a^2-7a+6=(a-1)(a-6)=0$
$a=1$ 또는 $a=6$
$0<a<4$이므로 $a=1$
(ⅱ) $a\ge 4$일 때,
최솟값은 $f(4)=a-10=0$
$a=10$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)$의 최솟값이 0이 되도록
하는 모든 $a$의 값의 합은 $1+10=11$

18. [출제의도] 두 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$는 직선 $l : y = \dfrac{1}{m}x + 2$ 위의 점이므로 $a = \boxed{2m}$

직선 BH는 직선 $l$에 수직이므로

직선 BH의 방정식은 $y = -m(x - \boxed{2m})$

$\dfrac{1}{m}x + 2 = -m(x - 2m)$

직선 $l$과 직선 BH가 만나는 점 H의 좌표는

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2m^3 - 2m}{\boxed{m^2+1}},\ \dfrac{4m^2}{\boxed{m^2+1}}\right)$

선분 OH의 길이는

$\sqrt{\left(\dfrac{2m^3-2m}{\boxed{m^2+1}}\right)^2 + \left(\dfrac{4m^2}{\boxed{m^2+1}}\right)^2}$

$= \dfrac{|2m|}{\boxed{m^2+1}}\sqrt{m^4 + \boxed{2} \times m^2 + 1}$

$= |\boxed{2m}|$

이므로 선분 OH의 길이와 선분 OB의 길이가 서로 같다.

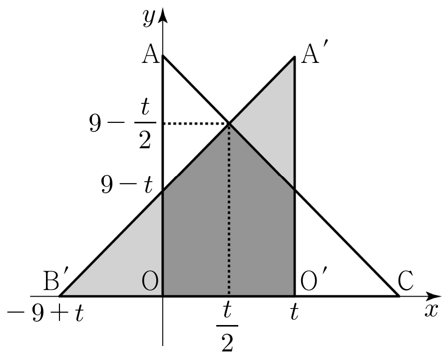
따라서 삼각형 OBH는 $m$의 값에 관계없이 이등변삼각형이다.

그러므로 $f(m) = 2m$, $g(m) = m^2+1$, $k = 2$

따라서 $f(2)\times g(2) = 4\times 5 = 20$

19. [출제의도] 점의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기

(ⅰ) $0 < t < 9$일 때,

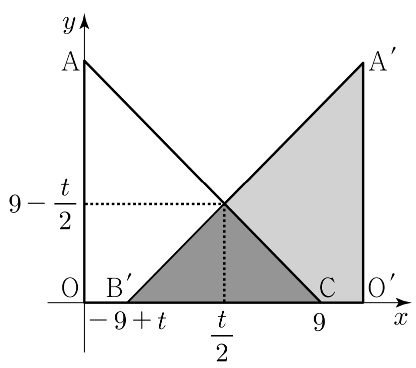



$S(t) = 2\times\dfrac{1}{2}\times\left(9 - t + 9 - \dfrac{t}{2}\right)\times\dfrac{t}{2}$

$= \dfrac{3}{4}t(12-t) = -\dfrac{3}{4}(t-6)^2 + 27$

따라서 $t = 6$일 때, $S(t)$의 최댓값은 27

(ⅱ) $9 \le t < 18$일 때,




$S(t) = \dfrac{1}{2}\times(18-t)\times\left(9-\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(t-18)^2$

따라서 $t = 9$일 때, $S(t)$의 최댓값은 $\dfrac{81}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $S(t)$의 최댓값은 27

20. [출제의도] 인수분해를 활용하여 추론하기

ㄱ. $P(\sqrt{n}) = (\sqrt{n})^4 + (\sqrt{n})^2 - n^2 - n = 0$ (참)

ㄴ. $P(x) = (x^2 - n)(x^2 + n + 1)$이므로

방정식 $P(x) = 0$은 $x = \sqrt{n}$, $x = -\sqrt{n}$만을 실근으로 가진다.

따라서 실근의 개수는 2 (참)

ㄷ. 모든 정수 $k$에 대하여

$P(k) = (k^2 - n)(k^2 + n + 1)$에서

$k^2 + n + 1 > 0$이고, $\mathrm{P}(k) \ne 0$을 만족시키려면

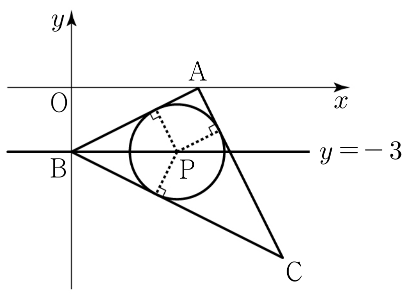
$n \ne k^2$이어야 하므로 $n$은 완전제곱수가 아닌 정수이다.

그러므로 $n$의 값은 2, 3, 5, 6, 7, 8

따라서 모든 $n$의 값의 합은 31 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기




직선 AB를 $l$이라 하면 $l : y = \dfrac{1}{2}x - 3$

직선 BC를 $m$이라 하면 $m : y = -\dfrac{1}{2}x - 3$

직선 CA를 $n$이라 하면 $n : y = -2x + 12$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하자. (단, $0 < a < 10$)

점 P와 직선 $l$ 사이의 거리와

점 P와 직선 $m$ 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|a - 2b - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|a + 2b + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$

$|a - 2b - 6| = |a + 2b + 6|$

$a = 0$ 또는 $b = -3$

$0 < a < 10$이므로 $b = -3$ … ㉠

또한 점 P와 직선 $m$ 사이의 거리와

점 P와 직선 $n$ 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|a + 2b + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{|2a + b - 12|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$

㉠을 대입하면 $|a| = |2a - 15|$

$a = 15$ 또는 $a = 5$

$0 < a < 10$이므로 $a = 5$

그러므로 $\mathrm{P}(5,\ -3)$

따라서 선분 OP의 길이는

$\sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(x+3)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 5x^2 + 10x + 12$

따라서 $x$의 계수는 10

23. [출제의도] 이차함수의 최댓값 이해하기

$f(x) = -x^2 - 4x + k = -(x+2)^2 + k + 4$

이차함수 $f(x)$의 최댓값은 $k + 4 = 20$

따라서 $k = 16$

24. [출제의도] 원의 방정식 계산하기

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11$

$= (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 - 11 = 0$

원의 방정식은 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

따라서 원의 반지름의 길이는 4

25. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + k$의 그래프와

직선 $y = 3x + 1$이 만나지 않으므로 이차방정식

$x^2 - 5x + k - 1 = 0$의 판별식을 $D$라 하면

$D = 25 - 4k + 4 < 0$

$k > \dfrac{29}{4}$

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 8

26. [출제의도] 연립부등식 이해하기

$x^2 - x - 56 \le 0$에서 $(x+7)(x-8) \le 0$

$-7 \le x \le 8$ … ㉠

$2x^2 - 3x - 2 > 0$에서 $(x-2)(2x+1) > 0$

$x < -\dfrac{1}{2}$ 또는 $x > 2$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$-7 \le x < -\dfrac{1}{2}$ 또는 $2 < x \le 8$

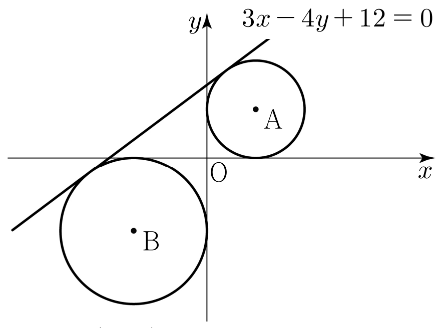
주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$는

$-7$, $-6$, $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$,

3, 4, 5, 6, 7, 8

따라서 정수 $x$의 개수는 13

27. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기




원의 중심을 $(a,\ a)$라 하면

점 $(a,\ a)$와 직선 $3x - 4y + 12 = 0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $|a|$와 같으므로

$\dfrac{|3a - 4a + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = |a|$

$|-a + 12| = 5|a|$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2 + a - 6 = 0$

$a = -3$ 또는 $a = 2$

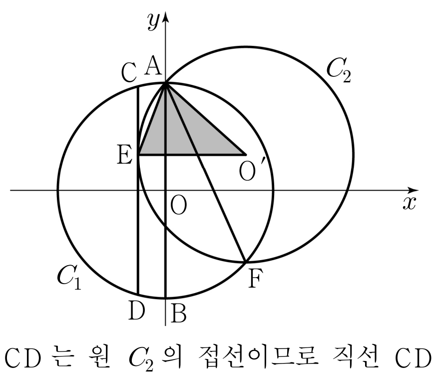
제1사분면 위의 점을 A, 제3사분면 위의 점을 B라 하면 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ -3)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \{2-(-3)\}^2 + \{2-(-3)\}^2 = 50$

28. [출제의도] 원의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

점 O를 중심으로 하는 원을 $C_1$,

점 O′을 중심으로 하는 원을 $C_2$라 하자.




직선 CD는 원 $C_2$의 접선이므로 직선 CD와 직선 EO′은 서로 수직이다.

$\mathrm{O}'(a,\ b)$에 대하여 삼각형 AEO′의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6\times(6 - b) = 12$

$b = 2$

따라서 원 $C_2$의 방정식은

$(x-a)^2 + (y-2)^2 = 36$

원 $C_2$는 점 $\mathrm{A}(0,\ 6)$을 지나므로

$a^2 + 16 = 36$

$a^2 = 20$

따라서 $a^2 + b^2 = 24$

29. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

직선 AC 의 기울기는

$\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$

직선 AC 와 직선 BD 는 서로 수직이므로

직선 BD 의 기울기는 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

직선 BD 의 방정식은

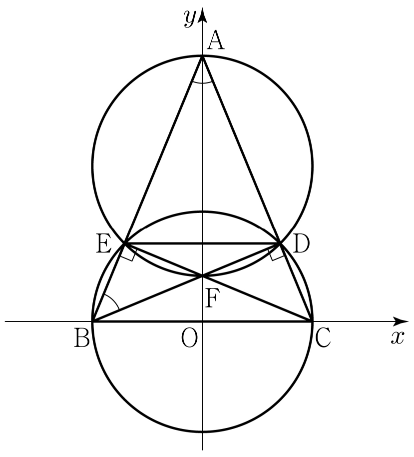
$y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$

점 F 의 좌표는 $\mathrm{F}(0,\ -2+2\sqrt{2})$

따라서 선분 AF 의 길이는 4

사각형 AEFD 는 지름이 $\overline{\mathrm{AF}}$ 인 원에 내접하고,
사각형 BCDE 는 지름이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 인 원에 내접한다. 두 원의 지름의 길이가 같으므로 호 ED 에 대한 원주각의 크기가 같다.

그러므로 $\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{DBE}$




삼각형 ABD 는 직각이등변삼각형이므로
삼각형 BFE 도 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{FE}}$ 이므로 $l=2\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\{0-(-2)\}^2+\{(2+2\sqrt{2})-0\}^2$
$=16+8\sqrt{2}$

$l^2=4\overline{\mathrm{AB}}^2=64+32\sqrt{2}$

$a=64$, $b=32$

따라서 $a+b=96$

**(다른 풀이)**

선분 AD 의 길이를 $a$,
선분 FD 의 길이를 $b$ 라 하자.
사각형 AEFD 의 둘레의 길이는 $l=2(a+b)$
삼각형 AFD 가 직각삼각형이고,
선분 AF 의 길이가 4 이므로 $a^2+b^2=16$
직선 BD 의 방정식은
$y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$ … ㉠
직선 AC 의 방정식은
$y=(-1-\sqrt{2})(x-2)$ … ㉡
㉠, ㉡ 을 연립하면
$x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$
점 D 의 좌표는 $\mathrm{D}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$
삼각형 AFD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}$

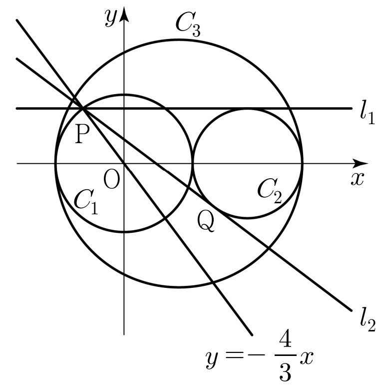
$ab=4\sqrt{2}$

$l^2=4(a^2+2ab+b^2)$
$=4(16+8\sqrt{2})=64+32\sqrt{2}$

$a=64$, $b=32$

따라서 $a+b=96$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기




점 P 의 좌표를 구하기 위해 직선의 방정식 $y=-\dfrac{4}{3}x$ 와 원 $C_1$ 의 방정식 $x^2+y^2=a^2$ 을

연립하면 $x^2=\left(\dfrac{3}{5}a\right)^2$

점 P 는 제2사분면 위의 점이므로

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5}a,\ \dfrac{4}{5}a\right)$

직선 $l_1$ 과 원 $C_2$ 가 만나는 점의 $y$ 좌표는

점 P 의 $y$ 좌표와 같으므로 $b-a=\dfrac{4}{5}a$

$b=\dfrac{9}{5}a$

점 P 에서 원 $C_2$ 에 그은 두 접선의 길이가 같으므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{9}{5}a-\left(-\dfrac{3}{5}a\right)=\dfrac{12}{5}a$

직선 $l_2$ 의 기울기를 $m$ 이라 할 때,

직선 $l_2$ 의 방정식은 $y=m\left(x+\dfrac{3}{5}a\right)+\dfrac{4}{5}a$

$5mx-5y+(3m+4)a=0$

원 $C_2$ 의 중심 $\left(\dfrac{9}{5}a,\ 0\right)$ 과 직선 $l_2$ 사이의 거리는

원 $C_2$ 의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{\left|5m\times\dfrac{9}{5}a+(3m+4)a\right|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=\frac{4}{5}a$$

$|12m+4|=4\sqrt{m^2+1}$

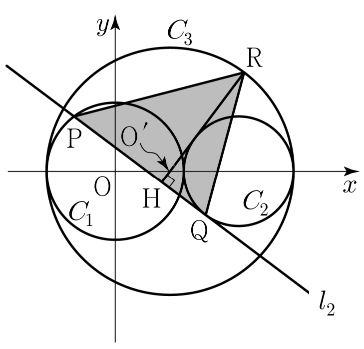
$|3m+1|=\sqrt{m^2+1}$

$9m^2+6m+1=m^2+1$

$m(4m+3)=0$

$m\neq0$ 이므로 $m=-\dfrac{3}{4}$

따라서 직선 $l_2$ 의 방정식은 $15x+20y-7a=0$




원 $C_3$ 의 중심을 O′ 이라 하자.

점 $\mathrm{O}'\left(\dfrac{4}{5}a,\ 0\right)$ 과 직선 $l_2$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|15\times\dfrac{4}{5}a-7a\right|}{\sqrt{15^2+20^2}}=\frac{5a}{25}=\frac{1}{5}a$$

점 R 에서 직선 $l_2$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면, 직선 RH 가 점 O′ 을 지날 때
삼각형 PQR 의 넓이가 최대이다.
그러므로 삼각형 PQR 의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{5}a\times\left(\dfrac{1}{5}a+\dfrac{9}{5}a\right)=\dfrac{12}{5}a^2=240$

$a=10$, $b=\dfrac{9}{5}\times10=18$

따라서 $a+b=28$