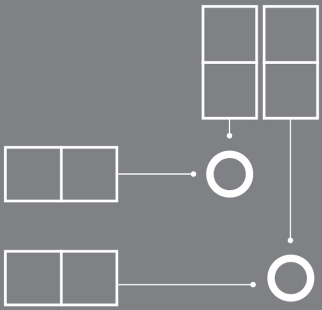
3강

양자 역학의 원리



아트: 난 너와 같지 않아, 레니.

내 머리는 양자 역학을 위해 만들어진 것이 아니라고.

레니: 물론이지, 내 머리도 그렇지 않아. 그런 걸 정말로 시각화할 수 없을 뿐이야.

하지만 이 말은 해 주고 싶네. 예전에 꼭 전자처럼 생각했던 녀석이 있었지.

아트: 그 사람한테 무슨 일이 있었나?

레니: 아트, 난 그저 그게 확실히 예쁘지는 않다는 걸 말하려는 것뿐이네.

아트: 흠, 그 유전자는 널리 퍼지지 못했을 것 같구먼.

연습 문제 3.1: 다음을 증명하라.

> 벡터 공간이 N 차원이면 에르미트 연산자의 고유 벡터로부터 N−벡터의 직교 정규 기저를 구축할 수 있다.

해답: 정리 2와 정리 3으로부터 N 차원 에르미트 연산자는 N 개의 고유 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 있다. 따라서 이 고유 벡터들은 완전 집합으로(정리 1), N−벡터 직교 정규 기저를 구축할 수 있다.

한편 직접 N 차원 고윳값 방정식을 풀어서 N 개의 고유 벡터를 구할 수 있음을 보일 수도 있다. 에르미트 연산자는 항상 대각화가 가능하다는 것과 같다. 왜냐하면 서로 수직인 고유 벡터가 N 개 있기 때문이다. 우선 고윳값 방정식을 풀어 보자.

$$M|a\rangle=\lambda|a\rangle$$

$$(M-\lambda I)|a\rangle=0.$$

따라서 고유 벡터를 구하려면 $\det(M-\lambda I)=0$이 되어야 한다는 것을 알 수 있고, 이는 N 차원 방정식이므로 반드시 하나 이상의 해를 가진다. 따라서 하나의 고윳값 λ와 그 고유 벡터 $|a\rangle$를 상정할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

이때 다음을 만족하고 역행렬을 가지는 일원(unitary) 행렬 C

를 만들 수 있다.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

즉 $C|a\rangle = |1\rangle$이다.

C를 만드는 방법은 C의 각 행을 벡터처럼 생각해, 첫 행을 $|a\rangle$와 나란하고 크기가 역수인 벡터로 취한 후, 그람-슈미트 과정을 통해 나머지 행을 거기에 직교하는 벡터들로 채우는 것이다.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{c_1} \\ \overrightarrow{c_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{c_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\overrightarrow{e_1} \\ c_2\overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ c_n\overrightarrow{e_n} \end{pmatrix}.$$

앞에서 만든 C가 실제로 $|a\rangle$를 $|l\rangle$로 만드는지 확인해 보자.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{c_1} \\ \overrightarrow{c_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{c_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\overrightarrow{e_1} \\ c_2\overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ c_n\overrightarrow{e_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\overrightarrow{e_1} \bullet \vec{a} \\ c_2\overrightarrow{e_2} \bullet \vec{a} \\ \vdots \\ c_n\overrightarrow{e_n} \bullet \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

이러한 C를 이용하면 행렬식을 간단하게 나타낼 수 있다.

$M|a\rangle = \lambda|a\rangle$

$CM|a\rangle = \lambda C|a\rangle$

$$CMC^{-1}C|a\rangle = \lambda C|a\rangle$$

$$CMC^{-1}|1\rangle = \lambda|1\rangle.$$

이때 $CMC^{-1}=D$라고 하면

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 D의 첫 열을 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \lambda & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

그리고 행렬 C가 일원 행렬이고 행렬 M은 에르미트 행렬이므로 행렬 D가 에르미트 행렬이 된다. 그러면 첫 열을 통해 첫 행도 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

그러면 행렬 D의 첫 행과 첫 열을 제외한 $N-1$ 차원 행렬

$$\begin{pmatrix} d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

을 생각할 수 있는데, 이 행렬 역시 에르미트 행렬이므로 반드시 하나 이상의 고윳값과 고유 벡터를 가진다. 같은 방법으로 두 번째 고유 벡터를 얻을 수 있다. 이를 계속 반복하면 N 개의 고유 벡터를 얻을 수 있으므로 에르미트 연산자의 고유 벡터로 직교 정규 기저를 구축할 수 있다.

연습 문제 3.2: 식 3.16이 식 3.14와 식 3.15의 유일한 풀이임을 증명하라.

식 3.14: $\begin{pmatrix} (\sigma_z)_{11} & (\sigma_z)_{12} \\ (\sigma_z)_{21} & (\sigma_z)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

식 3.15: $\begin{pmatrix} (\sigma_z)_{11} & (\sigma_z)_{12} \\ (\sigma_z)_{21} & (\sigma_z)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

식 3.16: $\begin{pmatrix} (\sigma_z)_{11} & (\sigma_z)_{12} \\ (\sigma_z)_{21} & (\sigma_z)_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

해답: 2차원 정사각 행렬이므로 미지수가 4개이고, 2개의 방정식을 가지는 행렬식이 2개 있으므로 주어진 식도 4개이다. 앞에서 볼 수 있듯이 주어진 4개의 식은 서로 다르므로 당연히 4개의 미지수는 유일한 해를 갖는다. 그 해인 식 3.16은 단순히 식 3.14와 3.15를 풀기만 해도 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} (\sigma_z)_{11} & (\sigma_z)_{12} \\ (\sigma_z)_{21} & (\sigma_z)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_z)_{11} \\ (\sigma_z)_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\sigma_z)_{11} & (\sigma_z)_{12} \\ (\sigma_z)_{21} & (\sigma_z)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_z)_{12} \\ (\sigma_z)_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

따라서 $(\sigma_z)_{11} = 1, (\sigma_z)_{21} = 0, (\sigma_z)_{12} = 0, (\sigma_z)_{22} = -1$이다.

연습 문제 3.3: σ_n의 고유 벡터와 고윳값을 계산하라. 힌트: 고유 벡터 $|\lambda_1\rangle$이 다음과 같은 형태

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

라 가정하자. 여기서 α는 미지의 변수이다. 이 벡터를 고윳값 방정식에 끼워 넣고 α를 θ로 푼다. 왜 하나의 변수 α만 사용했을까? 우리가 제안한 열 벡터는 길이가 1이어야 함을 유의하라.

해답: 우선 하나의 변수 α만 사용하는 이유는 길이가 1이라는 단서가 있기 때문이다. 그러면 고유 벡터를 구해 보자.

$$\sigma_n|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$$(\sigma_n - \lambda I)|\lambda\rangle = 0$$

$$\det(\sigma_n - \lambda I) = \begin{Vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{Vmatrix}$$

$$= (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta$$

$$= \lambda^2 - 1 = 0.$$

앞의 λ에 대한 2차 식을 풀면 고윳값은 1과 -1임을 알 수 있다. 이제 구한 고윳값으로 고유 벡터를 구해 보자.

① $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta-\alpha)\\ \sin(\theta-\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}.$$

따라서 $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$이고 고유 벡터는 $\begin{pmatrix}\cos\ \theta/2\\ \sin\ \theta/2\end{pmatrix}$이다.

② $\lambda=-1$

마찬가지로

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta-\alpha)\\ \sin(\theta-\alpha)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\pi)\\ \sin(\alpha+\pi)\end{pmatrix}$$

이고, 따라서 $\alpha=\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}$이므로 고유 벡터는 $\begin{pmatrix}\sin\ \theta/2\\ -\cos\ \theta/2\end{pmatrix}$이다.

연습 문제 3.4: $n_z = \cos\theta$, $n_x = \sin\theta\cos\phi$, $n_y = \sin\theta\sin\phi$라 하자. 각 θ와 ϕ는 구면 좌표계(그림 3.2를 보라.)의 보통 표기법에 따라 정의된다. 식 3.23의 행렬에 대한 고윳값과 고유벡터를 계산하라.

식 3.23: $\sigma_n = \begin{pmatrix} n_z & (n_x - i n_y) \\ (n_x + i n_y) & -n_z \end{pmatrix}$.

해답: 식 3.23에 대입하면 σ_n은 다음과 같이 변한다.

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & (\sin\theta\cos\phi - i\sin\theta\sin\phi) \\ (\sin\theta\cos\phi + i\sin\theta\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det(\sigma_n - \lambda I) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0.$$

따라서 고윳값은 1, −1이다.

① $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha + e^{-i\phi}\sin\theta\sin\alpha \\ e^{i\phi}\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

이때 이 식을 연습 문제 3.3에서와 같이 풀기 위해서는 위상 인자 $e^{i\phi}$를 소거할 필요가 있다. 따라서 $\sin\alpha$에 위상 인

자를 곱해서 $e^{i\phi}\sin\alpha$로 만들어 주면 된다.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha \\ e^{i\phi}\sin\theta\cos\alpha-e^{i\phi}\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ e^{i\phi}\sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

따라서 고유 벡터는 $\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix}$이다.

② $\lambda=-1$

마찬가지로 식을 전개하면

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha \\ e^{i\phi}\sin\theta\cos\alpha-e^{i\phi}\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ e^{i\phi}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ e^{i\phi}\sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\pi) \\ e^{i\phi}\sin(\alpha+\pi) \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 고유 벡터는 $\begin{pmatrix} \sin\theta/2 \\ -e^{i\phi}\cos\theta/2 \end{pmatrix}$이다.

연습 문제 3.5: $\sigma_m = +1$이 되도록 스핀이 준비되어 있다고 가정하자. 그리고는 관측 장비가 $\hat{n}$ 방향으로 돌아가 σ_n을 측정한다. 그 결과가 +1일 확률은 얼마인가? 우리가 σ_n에 사용했던 것과 똑같은 표기법을 사용하면 $\sigma_m = \sigma \cdot \hat{m}$임에 유의하라.

해답: 연습 문제 3.4에서 $\sigma_n = 1$이 되도록 하는 스핀을 구했다.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_m = 1$이 되도록 하는 스핀을

$$\begin{pmatrix} \cos\xi/2 \\ e^{i\psi}\sin\xi/2 \end{pmatrix}$$

라고 하자. 그러면 확률을 구하기 위해 두 스핀의 내적을 구해 보자.

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\xi}{2} & e^{-i\psi}\sin\frac{\xi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix} = \cos\frac{\xi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{i(\phi-\psi)}\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

이제 구한 내적에 그 복소 켤레를 곱하면 확률을 구할 수 있다.

$$\left(\cos\frac{\xi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{i(\phi-\psi)}\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\xi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{-i(\phi-\psi)}\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\xi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{\cos(\phi-\psi)}{2}\sin\xi\sin\theta + \sin^2\frac{\xi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1+\cos\xi}{2}\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{\cos\psi\cos\phi+\sin\psi\sin\phi}{2}\sin\xi\sin\theta$$

$$+\frac{1-\cos\xi}{2}\frac{1-\cos\theta}{2}.$$

이제 이 크기를 $\hat{m}$과 $\hat{n}$ 사이의 각도의 절반의 코사인을 제곱한 값과 비교해 보자. 우선 두 벡터 사이의 각도를 γ라고 하면 구하고자 하는 값은

$$\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1+\cos\gamma}{2}=\frac{1+\hat{m}\cdot\hat{n}}{2}$$

이며, 두 방향 벡터는

$$\hat{m}=(\sin\xi\cos\psi,\sin\xi\sin\psi,\cos\xi),$$

$$\hat{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$$

이므로

$$\hat{m}\cdot\hat{n}=\sin\theta\cos\phi\sin\xi\cos\psi+\sin\theta\sin\phi\sin\xi\sin\psi+\cos\theta\cos\xi$$

이다. 이렇게 구한 값들을 비교해 보면 서로 같음을 확인할 수 있다.