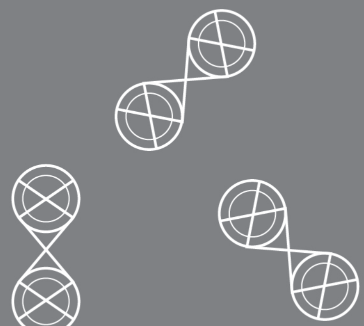
7강

얽힘 더 알아보기



1935년 여름 힐베르트 공간.

남루한 단골 2명이 격렬한 대화를 나누며 자동문을 통해 들어온다.

손질하지 않은 은발 머리에 해진 스웨터를 입은 사람이 말한다.

“아니야. 물리적 실재의 요소가 무엇인지 내게 말해 줄 수 없다면

난 자네 이론을 받아들이지 않을 걸세.”

다른 사내가 주위를 둘러보고는 확실히 좌절감에 빠진 듯

두 손을 위로 들어 올리고는 아트와 레니에게 말했다.

"저 양반 또 저러시네. 물리적 실재의 요소, EPR, EPR.

생각하는 거라곤 그게 다야.

알베르트, 이제 그만 강박 관념에서 벗어나서 사실을 받아들이세요."

"절대 안 되지. 어떤 것에 대해 알아야 할 모든 것을 알 수 있으면서

그 부분에 대해서는 아무것도 모른다는 점을 난 받아들일 수 없네.

그건 완전히 말도 안 돼, 닐스."

"미안해요, 알베르트. 그게 세상 돌아가는 이치에요.

내가 맥주 한잔 사죠."

연습 문제 7.1: 텐서 곱 $I \otimes \tau_x$를 행렬로 쓰고 이 행렬을 각각의 열 벡터 $|uu\rangle$, $|ud\rangle$, $|du\rangle$, $|dd\rangle$에 적용하라. 상태 벡터의 앨리스 반쪽은 각 경우에 변하지 않음을 보여라. I는 2×2 단위 행렬이다.

해답: 우선 텐서 곱 $I \otimes \tau_x$는 다음과 같다.

$$I \otimes \tau_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

이 행렬을 $|uu\rangle$에 적용하면

$$I \otimes \tau_x |uu\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |ud\rangle$$

이다. 앨리스 반쪽은 변하지 않는다. 마찬가지로 $|ud\rangle$, $|du\rangle$, $|dd\rangle$에 적용해 계산하면 각각

$$I \otimes \tau_x |ud\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |uu\rangle,$$

$$I \otimes \tau_x |du\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |dd\rangle,$$

$$I\otimes\tau_x|dd\rangle=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=|du\rangle$$

이다. 역시 앨리스 반쪽은 변하지 않는다.

연습 문제 7.2: 식 7.2에서 했던 것처럼 내적을 만들어서 $\sigma_z \otimes \tau_x$의 행렬 원소를 계산하라.

식 7.2:

$$\sigma_z \otimes I = \begin{pmatrix} \langle uu|\sigma_z I|uu\rangle & \langle uu|\sigma_z I|ud\rangle & \langle uu|\sigma_z I|du\rangle & \langle uu|\sigma_z I|dd\rangle \\ \langle ud|\sigma_z I|uu\rangle & \langle ud|\sigma_z I|ud\rangle & \langle ud|\sigma_z I|du\rangle & \langle ud|\sigma_z I|dd\rangle \\ \langle du|\sigma_z I|uu\rangle & \langle du|\sigma_z I|ud\rangle & \langle du|\sigma_z I|du\rangle & \langle du|\sigma_z I|dd\rangle \\ \langle dd|\sigma_z I|uu\rangle & \langle dd|\sigma_z I|ud\rangle & \langle dd|\sigma_z I|du\rangle & \langle dd|\sigma_z I|dd\rangle \end{pmatrix}.$$

해답: 계산의 편의를 위해 $\sigma_z \tau_x$가 모두 켓 벡터에만 작용한다고 하자. 식 6.6과 식 6.7을 참고해 계산하면 다음과 같다.

$$\sigma_z \otimes \tau_x = \begin{pmatrix} \langle uu|\sigma_z \tau_x|uu\rangle & \langle uu|\sigma_z \tau_x|ud\rangle & \langle uu|\sigma_z \tau_x|du\rangle & \langle uu|\sigma_z \tau_x|dd\rangle \\ \langle ud|\sigma_z \tau_x|uu\rangle & \langle ud|\sigma_z \tau_x|ud\rangle & \langle ud|\sigma_z \tau_x|du\rangle & \langle ud|\sigma_z \tau_x|dd\rangle \\ \langle du|\sigma_z \tau_x|uu\rangle & \langle du|\sigma_z \tau_x|ud\rangle & \langle du|\sigma_z \tau_x|du\rangle & \langle du|\sigma_z \tau_x|dd\rangle \\ \langle dd|\sigma_z \tau_x|uu\rangle & \langle dd|\sigma_z \tau_x|ud\rangle & \langle dd|\sigma_z \tau_x|du\rangle & \langle dd|\sigma_z \tau_x|dd\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle uu|ud\rangle & \langle uu|uu\rangle & -\langle uu|dd\rangle & -\langle uu|du\rangle \\ \langle ud|ud\rangle & \langle ud|uu\rangle & -\langle ud|dd\rangle & -\langle ud|du\rangle \\ \langle du|ud\rangle & \langle du|uu\rangle & -\langle du|dd\rangle & -\langle du|du\rangle \\ \langle dd|ud\rangle & \langle dd|uu\rangle & -\langle dd|dd\rangle & -\langle dd|du\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

연습 문제 7.3:

(a) 식 7.7과 식 7.8로부터 기호 A, B, a, b를 행렬과 열벡터로 바꾼 뒤, 식 7.10을 성분 형태로 다시 써라.

(b) 우변의 행렬 곱 Aa와 Bb를 수행하라. 각 결과는 2×1 행렬임을 확인하라.

(c) 세 가지 크로네커 곱을 모두 전개하라.

(d) 각 크로네커 곱의 행과 열 크기를 확인하라.

$$A\otimes B : 4\times 4$$
$$a\otimes b : 4\times 1$$
$$Aa\otimes Bb : 4\times 1.$$

(e) 좌변의 행렬 곱을 수행해서 4×1 열 벡터를 얻어라. 각 행은 4개의 분리된 항들의 합이어야 한다.

(f) 마지막으로 좌변과 우변의 열 벡터 결과가 똑같음을 확인하라.

식 7.7: $$A\otimes B=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

식 7.8: $$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} \\ a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11} \\ a_{21}b_{21} \end{pmatrix}.$$

식 7.10: $(A \otimes B)(a \otimes b) = (Aa \otimes Bb)$.

해답:

(a) $\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}\right)$

$$= \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}\right).$$

(b) Aa와 Bb는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{12}a_{21} \\ A_{21}a_{11} + A_{22}a_{21} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}b_{11} + B_{12}b_{21} \\ B_{21}b_{11} + B_{22}b_{21} \end{pmatrix}.$$

(c) 식 7.7과 식 7.8을 참고해 좌변의 크로네커 곱을 전개하면

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} \\ a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11} \\ a_{21}b_{21} \end{pmatrix},$$

우변을 전개하면

$$\begin{pmatrix} (A_{11}a_{11} + A_{12}a_{21})(B_{11}b_{11} + B_{12}b_{21}) \\ (A_{11}a_{11} + A_{12}a_{21})(B_{21}b_{11} + B_{22}b_{21}) \\ (A_{21}a_{11} + A_{22}a_{21})(B_{11}b_{11} + B_{12}b_{21}) \\ (A_{21}a_{11} + A_{22}a_{21})(B_{21}b_{11} + B_{22}b_{21}) \end{pmatrix}$$

이다.

(d) 앞의 (a), (b), (c)의 결과를 통해 각각 $A\otimes B$은 4×4, $a\otimes b$는 4×1, $Aa\otimes Bb$는 4×1임을 확인할 수 있다..

(e) $$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} \\ a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11} \\ a_{21}b_{21} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}a_{11}b_{11}+A_{11}B_{12}a_{11}b_{21}+A_{12}B_{11}a_{21}b_{11}+A_{12}B_{12}a_{21}b_{21} \\ A_{11}B_{21}a_{11}b_{11}+A_{11}B_{22}a_{11}b_{21}+A_{12}B_{21}a_{21}b_{11}+A_{12}B_{22}a_{21}b_{21} \\ A_{21}B_{11}a_{11}b_{11}+A_{21}B_{12}a_{11}b_{21}+A_{22}B_{11}a_{21}b_{11}+A_{22}B_{12}a_{21}b_{21} \\ A_{21}B_{21}a_{11}b_{11}+A_{21}B_{22}a_{11}b_{21}+A_{22}B_{21}a_{21}b_{11}+A_{22}B_{22}a_{21}b_{21} \end{pmatrix}.$$

(f) 앞의 열 벡터의 성분들을 인수 분해하면 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}a_{11}b_{11}+A_{11}B_{12}a_{11}b_{21}+A_{12}B_{11}a_{21}b_{11}+A_{12}B_{12}a_{21}b_{21} \\ A_{11}B_{21}a_{11}b_{11}+A_{11}B_{22}a_{11}b_{21}+A_{12}B_{21}a_{21}b_{11}+A_{12}B_{22}a_{21}b_{21} \\ A_{21}B_{11}a_{11}b_{11}+A_{21}B_{12}a_{11}b_{21}+A_{22}B_{11}a_{21}b_{11}+A_{22}B_{12}a_{21}b_{21} \\ A_{21}B_{21}a_{11}b_{11}+A_{21}B_{22}a_{11}b_{21}+A_{22}B_{21}a_{21}b_{11}+A_{22}B_{22}a_{21}b_{21} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}a_{11}B_{11}b_{11}+A_{11}a_{11}B_{12}b_{21}+A_{12}a_{21}B_{11}b_{11}+A_{12}a_{21}B_{12}b_{21} \\ A_{11}a_{11}B_{21}b_{11}+A_{11}a_{11}B_{22}b_{21}+A_{12}a_{21}B_{21}b_{11}+A_{12}a_{21}B_{22}b_{21} \\ A_{21}a_{11}B_{11}b_{11}+A_{21}a_{11}B_{12}b_{21}+A_{22}a_{21}B_{11}b_{11}+A_{22}a_{21}B_{12}b_{21} \\ A_{21}a_{11}B_{21}b_{11}+A_{21}a_{11}B_{22}b_{21}+A_{22}a_{21}B_{21}b_{11}+A_{22}a_{21}B_{22}b_{21} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (A_{11}a_{11}+A_{12}a_{21})(B_{11}b_{11}+B_{12}b_{21}) \\ (A_{11}a_{11}+A_{12}a_{21})(B_{21}b_{11}+B_{22}b_{21}) \\ (A_{21}a_{11}+A_{22}a_{21})(B_{11}b_{11}+B_{12}b_{21}) \\ (A_{21}a_{11}+A_{22}a_{21})(B_{21}b_{11}+B_{22}b_{21}) \end{pmatrix}.$$

연습 문제 7.4: 다음의 밀도 행렬을 계산하라.

$$|\Psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle.$$

해답: 밀도 행렬을 구하기 위해 우선 주어진 상태와 기저와의 내적을 먼저 구하자.

$$\Psi(u) = \langle u|\Psi\rangle = \langle u|\,(\alpha|u\rangle + \beta|d\rangle) = \alpha$$
$$\Psi(d) = \langle d|\Psi\rangle = \langle u|\,(\alpha|d\rangle + \beta|d\rangle) = \beta.$$

이제 밀도 행렬의 성분을 구할 수 있다.

$$\rho_{uu} = \Psi^*(u)\Psi(u) = \alpha^*\alpha$$
$$\rho_{ud} = \Psi^*(d)\Psi(u) = \beta^*\alpha$$
$$\rho_{du} = \Psi^*(u)\Psi(d) = \alpha^*\beta$$
$$\rho_{dd} = \Psi^*(d)\Psi(d) = \beta^*\beta.$$

따라서 밀도 행렬은 다음과 같다.

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \begin{pmatrix} \alpha^*\alpha & \beta^*\alpha \\ \alpha^*\beta & \beta^*\beta \end{pmatrix}.$$

정규화된 $|\Psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle$ 중 $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 경우를 생각해 보자. 그러면

$$\alpha^*\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\beta^{*}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^{*}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\beta^{*}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

이므로 밀도 행렬은 다음과 같다.

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \begin{pmatrix} \alpha^{*}\alpha & \beta^{*}\alpha \\ \alpha^{*}\beta & \beta^{*}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

연습 문제 7.5:

(a) 다음을 보여라.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

(b) 이제 $\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$라 가정하고, 다음을 계산하라.

ρ^2

$Tr(\rho)$

$Tr(\rho^2)$.

(c) 만약 ρ가 밀도 행렬이라면, 이 행렬이 순수 상태를 나타내는가, 아니면 혼합 상태를 나타내는가?

해답:

(a) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$

(b) (a)에서 보듯이

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

이며, 따라서 $Tr(\rho)$, $Tr(\rho^2)$는 각각 다음과 같다.

$$Tr(\rho) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

$$Tr(\rho^2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

(c) $Tr(\rho)$와 $Tr(\rho^2)$이 다르므로 혼합 상태이다.

연습 문제 7.6: 식 7.22를 이용해 만약 ρ가 밀도 행렬이면

$$Tr(\rho) = 1$$

임을 보여라.

식 7.22: $P(a) = \rho_{aa}$.

해답: $Tr(\rho)$를 계산하자.

$$Tr(\rho) = \sum_a \rho_{aa} = \sum_a P(a) = 1.$$

연습 문제 7.7: 식 7.24를 이용해 ρ^2를 계산하라. 이 결과로부터 어떻게 ρ가 얽힘 상태를 나타낸다고 확신할 수 있는가? 우리는 곧 얽힘을 검증할 수 있는 다른 방법이 있음을 알게 될 것이다.

식 7.24: $\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

해답: ρ^2을 계산하자.

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$Tr(\rho^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$이므로 ρ는 얽힘 상태이다.

연습 문제 7.8: 다음 상태들을 생각해 보자.

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|uu\rangle + |ud\rangle + |du\rangle + |dd\rangle)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|uu\rangle + |dd\rangle)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{5}(3|uu\rangle + 4|ud\rangle).$$

각각에 대해 앨리스의 밀도 행렬과 밥의 밀도 행렬을 계산하라. 이 행렬들의 성질을 검증하라.

해답:

① $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|uu\rangle + |ud\rangle + |du\rangle + |dd\rangle)$

$$\Psi(u,u) = \Psi(u,d) = \Psi(d,u) = \Psi(d,d) = \frac{1}{2}.$$

먼저 앨리스의 밀도 행렬부터 계산해 보면 다음과 같다.

$$\rho_{uu} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(u,a) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(u,d)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{ud} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(u,a) = \Psi^*(d,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(u,d)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(d,a) = \Psi^*(u,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(d,a) = \Psi^*(d,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

앨리스의 밀도 행렬은

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이다. 그리고 ρ^2 역시

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이므로 $Tr(\rho^2) = 1$이고, 순수 상태이다.

이제 밥의 밀도 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\rho_{uu} = \sum_a \Psi^*(a,u)\Psi(a,u) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,u)\Psi(d,u)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{ud} = \sum_a \Psi^*(a,d)\Psi(a,u) = \Psi^*(u,d)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,u)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(a,u)\Psi(a,d) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,d) + \Psi^*(d,u)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(a,d)\Psi(a,d) = \Psi^*(u,d)\Psi(u,d) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

밥의 밀도 행렬도

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이다. 마찬가지로 ρ^2도

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이므로 $Tr(\rho^2) = 1$이고, 순수 상태다.

② $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|uu\rangle + |dd\rangle)$

$$\Psi(u,u) = \Psi(d,d) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \Psi(u,d) = \Psi(d,u) = 0.$$

앞의 계산처럼 앨리스의 밀도 행렬을 구하자.

$$\rho_{uu} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(u,a) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(u,d)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times 0 = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{ud} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(u,a) = \Psi^*(d,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(u,d)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(d,a) = \Psi^*(u,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(d,d)$$

$$= 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 = 0$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(d,a) = \Psi^*(d,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$= 0 \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

이때

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Tr(\rho^2) = \frac{1}{2}$$

이므로 혼합 상태다. 같은 계산을 거쳐 밥의 밀도 행렬을 구하면 이번에도 앨리스의 밀도 행렬과 똑같이 나온다.

③ $|\Psi_3\rangle = \frac{1}{5}(3|uu\rangle + 4|ud\rangle)$

$$\Psi(u,u) = \frac{3}{5}, \quad \Psi(u,d) = \frac{4}{5}, \quad \Psi(d,u) = \Psi(d,d) = 0.$$

앨리스의 밀도 행렬을 먼저 구해 보면 다음과 같다.

$$\rho_{uu} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(u,a) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(u,d)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = 1$$

$$\rho_{ud} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(u,a) = \Psi^*(d,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(u,d)$$

$$= 0 \times \frac{3}{5} + 0 \times \frac{3}{5} = 0$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(d,a) = \Psi^*(u,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{3}{5} \times 0 + \frac{4}{5} \times 0 = 0$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(d,a) = \Psi^*(d,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$= 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

따라서

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Tr(\rho^2) = 1$$

이므로 순수 상태다. 마찬가지 계산으로 밥의 밀도 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\rho_{uu} = \sum_a \Psi^*(a,u)\Psi(a,u) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,u)\Psi(d,u)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + 0 \times 0 = \frac{9}{25}$$

$$\rho_{ud} = \sum_a \Psi^*(a,d)\Psi(a,u) = \Psi^*(u,d)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,u)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} + 0 \times 0 = \frac{12}{25}$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(a,u)\Psi(a,d) = \Psi^*(u,u)\Psi(u,d) + \Psi^*(d,u)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + 0 \times 0 = \frac{12}{25}$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(a,d)\Psi(a,d) = \Psi^*(u,d)\Psi(u,d) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + 0 \times 0 = \frac{16}{25}$$

$$\rho=\begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}.$$

따라서

$$\rho^2=\begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}, \quad Tr(\rho^2)=1$$

이므로 순수 상태다. 앞의 결과들을 살펴보면, 앨리스가 순수 상태로 관측하면 밥도 그렇게 관측하고, 앨리스가 혼합 상태로 관측하면 밥도 역시 그렇게 관측함을 알 수 있다.

연습 문제 7.9: 임의의 앨리스 관측량 A와 밥의 관측량 B가 주어졌을 때, 곱 상태에 대해서는 상관 관계 $C(A,\ B)$는 0임을 보여라.

해답: 통계적 상관 관계인 $C(A,\ B)$를 계산해 보자.

$$C(A,B)=\langle AB\rangle-\langle A\rangle\langle B\rangle$$
$$=\sum_{a,b}a\,b\,P(a,b)-\sum_a a\,P(a)\sum_b b\,P(b).$$

곱 상태에 대해서는 $P(a,b)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(a,b)=(\langle A|\otimes\langle B|)ab(|A\rangle\otimes|B\rangle)$$
$$=(\langle A|\otimes\langle B|)(|A'\rangle\otimes|B'\rangle)=\langle A|A'\rangle\langle B|B'\rangle$$
$$=\langle A|a|A\rangle\langle B|b|B\rangle=P(a)P(b).$$

따라서

$$\sum_{a,b}a\,b\,P(a,b)-\sum_a a\,P(a)\sum_b b\,P(b)$$
$$=\sum_{a,b}a\,b\,P(a)P(b)-\sum_a a\,P(a)\sum_b b\,P(b)$$
$$=0$$

이므로 상관 관계는 0이다.

연습 문제 7.10: 식 7.30의 상태는 완전히 얽히지 않은 상태를 나타냄을 확인하라.

식 7.30: $\alpha_u|u,b\rangle+\alpha_d|d,b\rangle$.

해답: 밀도 행렬을 구하자. 식 7. 30에 주어진 초기 상태는

$$\alpha_u|u,b\rangle+\alpha_d|d,b\rangle$$

이므로

$$\Psi(u,b)=\alpha_u,$$
$$\Psi(d,b)=\alpha_d,$$
$$\Psi(u,1)=\Psi(u,-1)=\Psi(d,1)=\Psi(d,-1)=0$$

이다. 따라서 다음과 같다.

$$\rho_{uu}=\sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(u,a)$$

$$=\Psi^*(u,b)\Psi(u,b)+\Psi^*(u,1)\Psi(u,1)+\Psi^*(u,-1)\Psi(u,-1)$$

$$=\alpha_u^*\alpha_u$$

$$\rho_{ud}=\sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(u,a)$$

$$=\Psi^*(d,b)\Psi(u,b)+\Psi^*(d,1)\Psi(u,1)+\Psi^*(d,-1)\Psi(u,-1)$$

$$=\alpha_d^*\alpha_u$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(d,a)$$

$$= \Psi^*(u,b)\Psi(d,b) + \Psi^*(u,1)\Psi(d,1) + \Psi^*(u,-1)\Psi(d,-1)$$

$$= \alpha_u^* \alpha_d$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(d,a)$$

$$= \Psi^*(d,b)\Psi(d,b) + \Psi^*(d,1)\Psi(d,1) + \Psi^*(d,-1)\Psi(d,-1)$$

$$= \alpha_d^* \alpha_d$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha_u^*\alpha_u & \alpha_d^*\alpha_u \\ \alpha_u^*\alpha_d & \alpha_d^*\alpha_d \end{pmatrix}.$$

이제 ρ^2을 구해 보자.

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \alpha_u^*\alpha_u & \alpha_d^*\alpha_u \\ \alpha_u^*\alpha_d & \alpha_d^*\alpha_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u^*\alpha_u & \alpha_d^*\alpha_u \\ \alpha_u^*\alpha_d & \alpha_d^*\alpha_d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_u^*\alpha_u(\alpha_u^*\alpha_u + \alpha_d^*\alpha_d) & \alpha_d^*\alpha_u(\alpha_u^*\alpha_u + \alpha_d^*\alpha_d) \\ \alpha_u^*\alpha_d(\alpha_u^*\alpha_u + \alpha_d^*\alpha_d) & \alpha_d^*\alpha_d(\alpha_u^*\alpha_u + \alpha_d^*\alpha_d) \end{pmatrix}.$$

이때 초기 상태 $\alpha_u|u,b\rangle + \alpha_d|d,b\rangle$가 정규화되어 있으므로

$$\alpha_u^*\alpha_u + \alpha_d^*\alpha_d = 1$$

이다. 따라서

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \alpha_u^*\alpha_u & \alpha_d^*\alpha_u \\ \alpha_u^*\alpha_d & \alpha_d^*\alpha_d \end{pmatrix} = \rho, \quad Tr(\rho^2) = 1$$

이다. 혼합 상태가 아니라 순수 상태이므로 완전히 얽히지 않은 상태이다. 그리고 지금 구한 밀도 행렬은 $|u\rangle$, $|d\rangle$에 대한 행렬이지만, $|b\rangle$, $|1\rangle$, $|-1\rangle$에 대해 구해도 마찬가지로 순수 상태로 나온다. 그 계산을 적자면

$$\rho_{bb} = \sum_a \Psi^*(a,b)\Psi(a,b) = \Psi^*(u,b)\Psi(u,b) + \Psi^*(d,b)\Psi(d,b) = 1$$

$$\begin{aligned}\rho_{b(-1)} &= \sum_a \Psi^*(a,-1)\Psi(a,b) \\ &= \Psi^*(u,-1)\Psi(u,b) + \Psi^*(d,-1)\Psi(d,b) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\rho_{b1} = \sum_a \Psi^*(a,1)\Psi(a,b) = \Psi^*(u,1)\Psi(u,b) + \Psi^*(d,1)\Psi(d,b) = 0$$

$$\begin{aligned}\rho_{(-1)b} &= \sum_a \Psi^*(a,b)\Psi(a,-1) \\ &= \Psi^*(u,b)\Psi(u,-1) + \Psi^*(d,b)\Psi(d,-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{(-1)(-1)} &= \sum_a \Psi^*(a,-1)\Psi(a,-1) \\ &= \Psi^*(u,-1)\Psi(u,-1) + \Psi^*(d,-1)\Psi(d,-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{(-1)1} &= \sum_a \Psi^*(a,1)\Psi(a,-1) \\ &= \Psi^*(u,1)\Psi(u,-1) + \Psi^*(d,1)\Psi(d,-1)\end{aligned}$$

$$=0$$

$$\rho_{1b}=\sum_a \Psi^*(a,b)\Psi(a,1)=\Psi^*(u,b)\Psi(u,1)+\Psi^*(d,b)\Psi(d,1)=0$$

$$\rho_{1(-1)}=\sum_a \Psi^*(a,-1)\Psi(a,1)$$

$$=\Psi^*(u,-1)\Psi(u,1)+\Psi^*(d,-1)\Psi(d,1)$$

$$=0$$

$$\rho_{11}=\sum_a \Psi^*(a,1)\Psi(a,1)=\Psi^*(u,1)\Psi(u,1)+\Psi^*(d,1)\Psi(d,1)=0$$

이다. 앞서 언급했듯이

$$\rho=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

이므로 순수 상태이다.

연습 문제 7.11: ‘거의 홑겹’ 상태에서 σ_z에 대한 앨리스의 밀도 행렬을 계산하라.

해답: 본문에 나와 있는 ‘거의 홑겹’ 상태는 다음과 같다.

$$\sqrt{0.6}\,|ud\rangle - \sqrt{0.4}\,|du\rangle.$$

따라서

$$\Psi(u,u) = \Psi(d,d) = 0,$$

$$\Psi(u,d) = \sqrt{0.6}\,,$$

$$\Psi(d,u) = -\sqrt{0.4}$$

이고, 이것을 이용해 밀도 행렬의 성분을 구하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\rho_{uu} &= \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(u,a) \\ &= \Psi^*(u,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(u,d) \\ &= 0.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{ud} &= \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(u,a) \\ &= \Psi^*(d,u)\Psi(u,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(u,d) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\rho_{du} = \sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(d,a)$$

$$= \Psi^*(u,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(u,d)\Psi(d,d)$$

$$= 0$$

$$\rho_{dd} = \sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(d,a)$$

$$= \Psi^*(d,u)\Psi(d,u) + \Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$= 0.4$$

따라서 밀도 행렬은 다음과 같다.

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

연습 문제 7.12: 각 전과 기록에서 수치들을 확인하라.

해답: 전과 기록에 나오는 상태 벡터는 총 3개이다. 하나씩 살펴보도록 하자.

① $\alpha_u\beta_u|uu\rangle+\alpha_u\beta_d|ud\rangle+\alpha_d\beta_u|du\rangle+\alpha_d\beta_d|dd\rangle$

첫 번째 상태는 곱 상태이며 앨리스의 밀도를 우선 구해보자.

$$\Psi(u,u)=\alpha_u\beta_u,\ \Psi(u,d)=\alpha_u\beta_d,\ \Psi(d,u)=\alpha_d\beta_u,\ \Psi(d,d)=\alpha_d\beta_d.$$

$$\rho_{uu}=\sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(u,a)=\Psi^*(u,u)\Psi(u,u)+\Psi^*(u,d)\Psi(u,d)$$

$$=\alpha_u^*\beta_u^*\alpha_u\beta_u+\alpha_u^*\beta_d^*\alpha_u\beta_d=\alpha_u^*\alpha_u\left(\beta_u^*\beta_u+\beta_d^*\beta_d\right)=\alpha_u^*\alpha_u$$

$$\rho_{ud}=\sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(u,a)=\Psi^*(d,u)\Psi(u,u)+\Psi^*(d,d)\Psi(u,d)$$

$$=\alpha_u^*\alpha_d$$

$$\rho_{du}=\sum_a \Psi^*(u,a)\Psi(d,a)=\Psi^*(u,u)\Psi(d,u)+\Psi^*(u,d)\Psi(d,d)$$

$$=\alpha_d^*\alpha_u$$

$$\rho_{dd}=\sum_a \Psi^*(d,a)\Psi(d,a)=\Psi^*(d,u)\Psi(d,u)+\Psi^*(d,d)\Psi(d,d)$$

$$=\alpha_d^*\alpha_d$$

$$\rho=\begin{pmatrix}\alpha_u^*\alpha_u & \alpha_d^*\alpha_u\\ \alpha_u^*\alpha_d & \alpha_d^*\alpha_d\end{pmatrix}.$$

이제 밀도 행렬에 앨리스의 부분계의 파동 함수를 구해 보면 다음과 같다.

$$\alpha_u|u\rangle+\alpha_d|d\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_u\\ \alpha_d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_u^*\alpha_u & \alpha_d^*\alpha_u\\ \alpha_u^*\alpha_d & \alpha_d^*\alpha_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_u\\ \alpha_d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_u\\ \alpha_d\end{pmatrix}.$$

따라서 밀도 행렬이 고윳값이 1인 고유 벡터를 가지며 그 벡터는 앨리스의 부분계의 파동 함수이다.

이제 σ_x, σ_y, σ_z의 기댓값을 알아보자.

$$\begin{aligned}\langle\sigma_x\rangle&=\left(\alpha_u^*\beta_u^*\langle uu|+\alpha_u^*\beta_d^*\langle ud|+\alpha_d^*\beta_u^*\langle du|+\alpha_d^*\beta_d^*\langle dd|\right)\\ &\quad\times\sigma_x\times\left(\alpha_u\beta_u|uu\rangle+\alpha_u\beta_d|ud\rangle+\alpha_d\beta_u|du\rangle+\alpha_d\beta_d|dd\rangle\right)\\ &=\left(\alpha_u^*\beta_u^*\langle uu|+\alpha_u^*\beta_d^*\langle ud|+\alpha_d^*\beta_u^*\langle du|+\alpha_d^*\beta_d^*\langle dd|\right)\\ &\quad\times\left(\alpha_u\beta_u|du\rangle+\alpha_u\beta_d|dd\rangle+\alpha_d\beta_u|uu\rangle+\alpha_d\beta_d|ud\rangle\right)\\ &=\alpha_u^*\beta_u^*\alpha_d\beta_u+\alpha_u^*\beta_d^*\alpha_d\beta_d+\alpha_d^*\beta_u^*\alpha_u\beta_u+\alpha_d^*\beta_d^*\alpha_u\beta_d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\sigma_y\rangle&=\left(\alpha_u^*\beta_u^*\langle uu|+\alpha_u^*\beta_d^*\langle ud|+\alpha_d^*\beta_u^*\langle du|+\alpha_d^*\beta_d^*\langle dd|\right)\\ &\quad\times\sigma_y\times\left(\alpha_u\beta_u|uu\rangle+\alpha_u\beta_d|ud\rangle+\alpha_d\beta_u|du\rangle+\alpha_d\beta_d|dd\rangle\right)\\ &=\left(\alpha_u^*\beta_u^*\langle uu|+\alpha_u^*\beta_d^*\langle ud|+\alpha_d^*\beta_u^*\langle du|+\alpha_d^*\beta_d^*\langle dd|\right)\\ &\quad\times i\left(\alpha_u\beta_u|du\rangle+\alpha_u\beta_d|dd\rangle-\alpha_d\beta_u|uu\rangle-\alpha_d\beta_d|ud\rangle\right)\end{aligned}$$

$$=i\left(-\alpha_u^*\beta_u^*\alpha_d\beta_u-\alpha_u^*\beta_d^*\alpha_d\beta_d+\alpha_d^*\beta_u^*\alpha_u\beta_u+\alpha_d^*\beta_d^*\alpha_u\beta_d\right)$$

$$\langle\sigma_z\rangle=\left(\alpha_u^*\beta_u^*\langle uu|+\alpha_u^*\beta_d^*\langle ud|+\alpha_d^*\beta_u^*\langle du|+\alpha_d^*\beta_d^*\langle dd|\right)$$

$$\times\sigma_z\times\left(\alpha_u\beta_u|uu\rangle+\alpha_u\beta_d|ud\rangle+\alpha_d\beta_u|du\rangle+\alpha_d\beta_d|dd\rangle\right)$$

$$=\left(\alpha_u^*\beta_u^*\langle uu|+\alpha_u^*\beta_d^*\langle ud|+\alpha_d^*\beta_u^*\langle du|+\alpha_d^*\beta_d^*\langle dd|\right)$$

$$\times\left(\alpha_u\beta_u|uu\rangle+\alpha_u\beta_d|ud\rangle-\alpha_d\beta_u|du\rangle-\alpha_d\beta_d|dd\rangle\right)$$

$$=\alpha_u^*\beta_u^*\alpha_u\beta_u+\alpha_u^*\beta_d^*\alpha_u\beta_d-\alpha_d^*\beta_u^*\alpha_d\beta_u-\alpha_d^*\beta_d^*\alpha_d\beta_d\,.$$

구한 기댓값을 제곱해 더하면 다음을 보일 수 있다.

$$\langle\sigma_x\rangle^2+\langle\sigma_y\rangle^2+\langle\sigma_z\rangle^2=1.$$

이 결과는 τ 연산자에 대해서도 동일하다.

마지막으로 파동 함수가 인수 분해 되면 $P(a,b)$ 역시 인수 분해된다. 연습 문제 6.1에서 보였듯, 상관 관계는 0이 된다.

② $\frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle-|du\rangle)$

두 번째 상태는 홑겹 상태이다. 첫 번째와 마찬가지로 밀도 행렬을 우선 구하는데, 이번에는 행렬 형태가 아니라 브라켓 형태로 밀도 행렬을 구해 보자.

$$\rho=|\Psi\rangle\langle\Psi|=\frac{1}{2}(|ud\rangle-|du\rangle)(\langle ud|-\langle du|)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

따라서 $Tr(\rho) = 1$이다.

σ_x, σ_y, σ_z의 기댓값은 모두 0인데, 홑겹 상태의 경우 두 스핀이 모두 어긋나 있기 때문에 연산자 σ가 적용되면 직교하게 되기 때문이다. τ 연산자도 마찬가지로 기댓값이 모두 0이다.

연습 문제 6.9에서 $\sigma_x\tau_x$, $\sigma_y\tau_y$, $\sigma_z\tau_z$의 기댓값이 모두 -1임을 보였으므로 $\sigma_x\tau_x$의 상관 관계는 $\langle\sigma_x\tau_x\rangle - \langle\sigma_x\rangle\langle\tau_x\rangle = -1$이 된다.

③ $\sqrt{0.6}\,|ud\rangle - \sqrt{0.4}\,|du\rangle$

세 번째 상태는 거의 홑겹 상태이다. 밀도 행렬은 연습 문제 7.11에서 다루었으므로 $\rho^2 \neq \rho$임은 쉽게 알 수 있다. 앞에서와 마찬가지로 σ_x, σ_y, σ_z의 기댓값을 구해 보면 각각

$$\langle\sigma_x\rangle = 0, \ \langle\sigma_y\rangle = 0, \ \langle\sigma_z\rangle = 0.2$$

$$\langle\tau_x\rangle = 0, \ \langle\tau_y\rangle = 0, \ \langle\tau_z\rangle = -0.2$$

$$\langle\sigma_z\tau_z\rangle = -1$$

이 된다. 따라서 상관 관계는 $\langle\sigma_z\tau_z\rangle - \langle\sigma_z\rangle\langle\tau_z\rangle = -0.96$이다.