2019학년도 11월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	③	**2**	②	**3**	⑤	**4**	④	**5**	③
6	④	**7**	②	**8**	④	**9**	④	**10**	⑤
11	②	**12**	⑤	**13**	⑤	**14**	③	**15**	③
16	①	**17**	①	**18**	②	**19**	①	**20**	⑤
21	②	**22**	19	**23**	11	**24**	5	**25**	7
26	108	**27**	12	**28**	40	**29**	130	**30**	90

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(xy+x-1)+(xy-x+2)=2xy+1$

2. [출제의도] 집합 이해하기

$A=B$이므로 $a=4,\ b=2$

따라서 $a\times b=8$

3. [출제의도] 복소수 계산하기

$\overline{z}=2-i$에서 $z=2+i$

$z+\overline{z}=(2+i)+(2-i)=4$

4. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 8이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+8=-a,\ 2\times 8=b$

$a=-10,\ b=16$

따라서 $a+b=6$

5. [출제의도] 두 직선의 위치관계 이해하기

직선 $y=7x-1$과

직선 $y=(3k-2)x+2$가 서로 평행하므로

기울기는 서로 같고 y절편은 서로 다르다.

$7=3k-2$

따라서 $k=3$

6. [출제의도] 인수분해 이해하기

$x^2+x=t$라 하면

$$\begin{aligned}(x^2+x)^2+2(x^2+x)-3&=t^2+2t-3\\&=(t-1)(t+3)\\&=(x^2+x-1)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

에서 $a=1,\ b=3$

따라서 $a+b=4$

7. [출제의도] 합성함수와 역함수 이해하기

$g(5)=3$이므로 $g^{-1}(3)=5$

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(7)=2$

$g^{-1}(3)+(g\circ f)(4)=7$

8. [출제의도] 외분점 계산하기

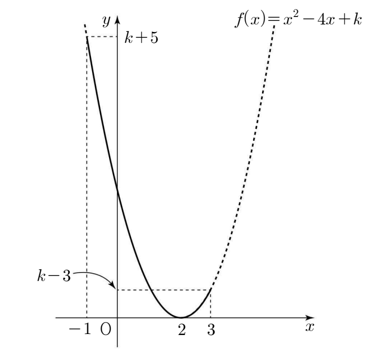
선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표가

$\left(\dfrac{4-1}{2-1},\ \dfrac{2a-7}{2-1}\right)$이고 이 점이 x축 위에 있으므로

$\dfrac{2a-7}{2-1}=0$

따라서 $a=\dfrac{7}{2}$

9. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소 이해하기



$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$

$-1\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서

최댓값 9를 갖는다.

$f(-1)=k+5=9$

따라서 $k=4$

10. [출제의도] 절댓값을 포함한 부등식 이해하기

부등식 $x>|3x+1|-7$에서

(ⅰ) $x\ge -\dfrac{1}{3}$일 때

$x>3x+1-7$에서 $x<3$

$-\dfrac{1}{3}\le x<3$

(ⅱ) $x<-\dfrac{1}{3}$일 때

$x>-3x-1-7$에서 $x>-2$

$-2<x<-\dfrac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-2<x<3$

따라서 모든 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 합은 2

11. [출제의도] 함수의 성질을 이용하여 추론하기

함수 $f(x)$가 항등함수이므로

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이다.

$x=-3$일 때

$2\times(-3)+a=-3$에서 $a=3$

$x=1$일 때

$1^2-2\times 1+b=1$에서 $b=2$

따라서 $a\times b=6$

12. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$을 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼,

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

점 $\left(a-\dfrac{1}{2},\ a^2+2\right)$가 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$a^2+2=4a-2$

$(a-2)^2=0$

따라서 $a=2$

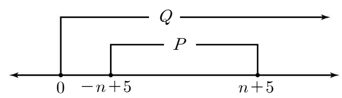
13. [출제의도] 명제의 조건 이해하기

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.

$P=\{x\mid -n+5\le x\le n+5\}$

$Q=\{x\mid x\ge 0\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$



$-n+5\ge 0$에서 $n\le 5$

따라서 모든 자연수 n의 개수는 5

14. [출제의도] 원과 직선의 위치관계 이해하기

점 $(2,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의

기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y+4=m(x-2)$이다.

원의 중심 $(0,0)$과 직선 $y+4=m(x-2)$ 사이의

거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|-2m-4|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2}$에서 $m^2+8m+7=0$

$m=-1$ 또는 $m=-7$

$y=mx-2m-4$가 y축과 만나는 점의 좌표는

$(0,\ -2),\ (0,10)$

따라서 $a+b=8$

15. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 추론하기

다항식 $f(x+1)$을 x로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x+1)=xQ_1(x)+6$

위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=6$

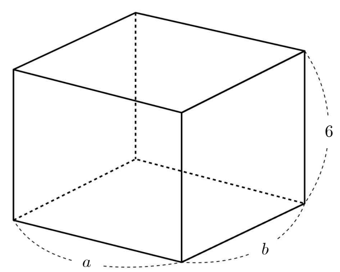
다항식 $f(x)$를 x^2-x로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-x)Q_2(x)+ax+a\\&=x(x-1)Q_2(x)+ax+a\end{aligned}$$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=2a$

$2a=6$이므로 $a=3$

16. [출제의도] 절대부등식을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각

$a,\ b,\ 6$이라 하자.

$6ab=108$이므로 $ab=18$이고

직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+6^2}$이다.

$a>0,\ b>0$이므로

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립한다.)

$a^2+b^2\ge 36$

$\sqrt{a^2+b^2+36}\ge 6\sqrt{2}$

따라서 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{2}$

17. [출제의도] 인수분해를 활용하여 문제해결하기

$(182\sqrt{182}+13\sqrt{13})\times(182\sqrt{182}-13\sqrt{13})$

$=182^3-13^3$

$=(13\times 14)^3-(13\times 1)^3$

$=13^3\times(14^3-1^3)$

$=13^3\times(14-1)\times(14^2+14\times 1+1^2)$

$=13^4\times 211$

따라서 $m=211$

18. [출제의도] 복소수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$(p+2qi)^2=p^2-4q^2+4pqi$이므로

$p^2-4q^2=0$ ……㉠

$4pq=-16$ ……㉡

㉠에서 $p=2q$ 또는 $p=-2q$

$p=2q$일 때

㉡에서 $q^2=-2$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 두 실수 p, q는 존재하지 않는다.

$p=-2q$일 때

㉡에서 $q^2=2$이므로

$q=\sqrt{2}$ 또는 $q=-\sqrt{2}$

$p>0$이므로 $p=2\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

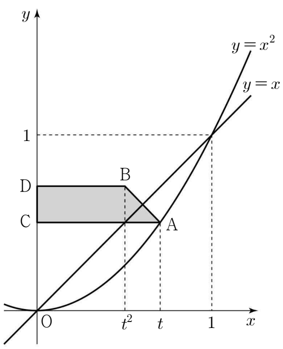
$p+q=\sqrt{2}$에서 $a=-\sqrt{2}$

$pq=-4$에서 $b=-4$

따라서 $a^2+b^2=18$

19. [출제의도] 사차방정식을 이용하여 추론하기

점 B는 점 $\mathrm{A}(t, t^2)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 B의 좌표는 (t^2, t)이다.



그림과 같이 점 A에서 y축에 내린 수선의 발이 C이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=t$

점 B에서 y축에 내린 수선의 발이 D이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=t^2$

$\overline{\mathrm{DC}}=\boxed{t-t^2}$이므로

사각형 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2}(t+t^2)(t-t^2)=\frac{1}{2}t^2\times\left(\boxed{1-t^2}\right)$

사각형 ABDC의 넓이가 $\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{2}t^2\times\left(\boxed{1-t^2}\right)=\frac{1}{8}$

$t^2(1-t^2)=\frac{1}{4}$, $(2t^2-1)^2=0$

따라서 $t=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $(0<t<1)$

$f(t)=t-t^2$, $g(t)=1-t^2$, $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

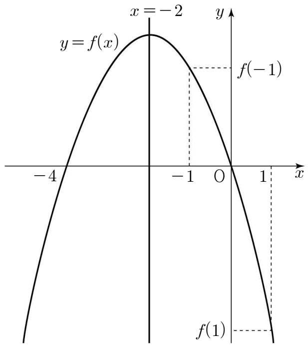
$$f(k)\times g(k)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

20. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 추론하기

조건 (가), (나)에 의하여

함수 $f(x)=ax(x+4)$ $(a<0)$이고

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

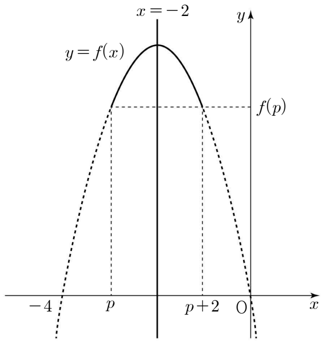


ㄱ. 함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=-2$이므로 $f(0)=0$ (참)

ㄴ. 위 그림과 같이 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다. (참)

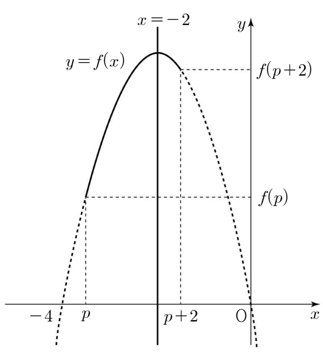
ㄷ. 함수 $f(x)$에서

(ⅰ) $p=-3$일 때



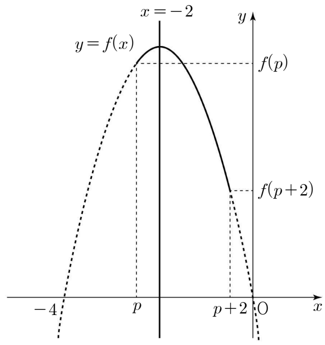
$f(p)=f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$

(ⅱ) $p<-3$일 때



$f(p)<f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$

(ⅲ) $p>-3$일 때



$f(p)>f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p+2)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $g(p)$는 다음과 같다.

$$g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le -3) \\ f(p+2) & (p>-3)\end{cases}$$

$p\le -3$인 모든 p에 대하여 $g(p)\le f(-3)$이고

$p>-3$인 모든 p에 대하여 $g(p)<f(-3)$이므로

$g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.

$f(-3)=1$에서 $a=-\frac{1}{3}$이므로

$f(-2)=-\frac{1}{3}\times(-2)\times(-2+4)=\frac{4}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 집합의 성질을 활용하여 문제해결하기

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로

x는 20 이하의 자연수이고 $y-k$는 30의 약수이다.

$y\in U$이므로 $y-k<30$이고 $x\ne 1$

$x\in U$이므로 $x\ne 30$

$y-k$와 x 사이의 관계는 아래 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$A_k\subset\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$

$\frac{30-x}{5}\in U$에서 $30-x$는 5의 배수이므로

$B=\{5, 10, 15, 20\}$

$(A_k\cap B^C)\subset\{2, 3, 6\}$

(ⅰ) $2\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=2$, $y-k=15$이고 $y=15+k\le 20$

$k\le 5$

(ⅱ) $3\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=3$, $y-k=10$이고 $y=10+k\le 20$

$k\le 10$

(ⅲ) $6\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=6$, $y-k=5$이고 $y=5+k\le 20$

$k\le 15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$k\le 5$일 때 $A_k\cap B^C=\{2, 3, 6\}$

$5<k\le 10$일 때 $A_k\cap B^C=\{3, 6\}$

$10<k\le 15$일 때 $A_k\cap B^C=\{6\}$

$n(A_k\cap B^C)=1$이므로 $10<k\le 15$

따라서 모든 자연수 k의 개수는 5

22. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$P(x)=x^2+4x-2$라 하면 $x-3$으로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $P(3)=19$

23. [출제의도] 항등식 이해하기

$4x^2+ax-1=bx(x+2)+c$

$\quad\quad\quad\quad\quad=bx^2+2bx+c$

양변의 계수를 비교하면

$a=8,\ b=4,\ c=-1$

따라서 $a+b+c=11$

24. [출제의도] 집합 사이의 포함관계를 이용하여 추론하기

$A\subset B$이고 a는 양수이므로 $a=5$

25. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡에서

$2(2y+1)-y^2=6$

$(y-2)^2=0,\ y=2$

$x=5$

따라서 $\alpha+\beta=7$

26. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AC}}=a,\ \overline{\mathrm{BC}}=b$라 하면

삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{6})^2=24$이고

삼각형 ABC의 넓이가 3이므로 $ab=6$이다.

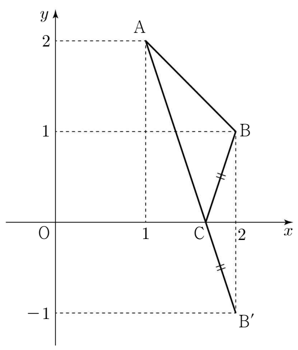
$(a+b)^2=36$이므로 $a+b=6$이다.

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\quad\quad=6^3-3\times6\times6=108$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}^3+\overline{\mathrm{BC}}^3=108$

27. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{BA}}$

점 $\mathrm{B}(2,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 점 B'의 좌표는 $(2,-1)$이다.

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$이고

$\overline{\mathrm{BA}}=\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{10}$이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$

따라서 $a+b=12$

28. [출제의도] 함수의 성질을 이용하여 추론하기

$(g\circ f)(1)=g(a+1)=(a+1)^2$

$a\leq4$일 때

$(f\circ g)(4)=f(16)=a+16$

$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=a^2+3a+17=57$

$a^2+3a-40=(a-5)(a+8)=0$

$a=-8$

$a>4$일 때

$(f\circ g)(4)=f(2)=a+2$

$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=a^2+3a+3=57$

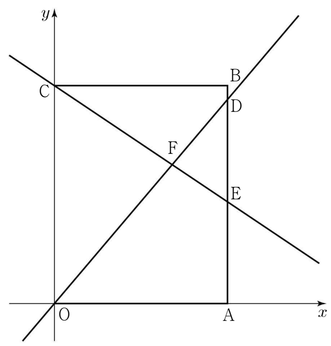
$a^2+3a-54=(a-6)(a+9)=0$

$a=6$

$S=-8+6=-2$

따라서 $10S^2=40$

29. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기



사각형 OAEF의 넓이와 삼각형 DFE의 넓이의 합은 삼각형 OAD의 넓이이고

사각형 BCFD의 넓이와 삼각형 DFE의 넓이의 합은 삼각형 CEB의 넓이이므로

삼각형 OAD의 넓이는 삼각형 CEB의 넓이보다 4만큼 크다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{CB}}=4$이므로

삼각형 OAD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{DA}}$이고

삼각형 CEB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{BE}}$이다.

$\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{DA}}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{BE}}+4$

$\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{BE}}+2$

$\overline{\mathrm{BE}}=k$라 놓으면, $\overline{\mathrm{DA}}=k+2$

직선 OD의 기울기는 $\frac{k+2}{4}$

직선 CE의 기울기는 $-\frac{k}{4}$

직선 OD와 직선 CE의 기울기의 곱은 $-\frac{7}{9}$이므로

$\left(\frac{k+2}{4}\right)\times\left(-\frac{k}{4}\right)=-\frac{7}{9}$

$9k^2+18k-112=0$

$(3k-8)(3k+14)=0$

$k=\frac{8}{3}$ 또는 $k=-\frac{14}{3}$

$k>0$이므로 $k=\frac{8}{3}$

직선 OD의 방정식은 $y=\frac{7}{6}x$

직선 CE의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+5$

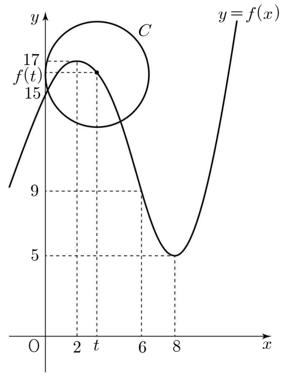
두 직선이 만나는 점은 $\mathrm{F}\left(\frac{30}{11},\ \frac{35}{11}\right)$

$a=\frac{30}{11},\ b=\frac{35}{11}$

따라서 $22(a+b)=130$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 활용하여 문제해결하기

원 C는 중심이 $(t,\ f(t))$이고 반지름의 길이가 t인 원이므로 원 C는 중심이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있고 y축에 접한다.

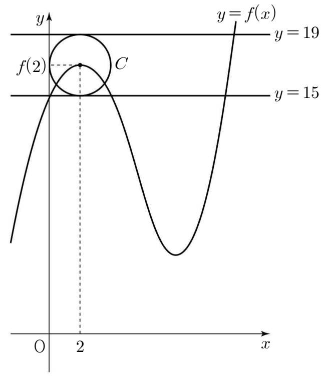


조건 (가)에 의하여

$g(2)=1$이므로 중심이 $(2,\ f(2))$이고 반지름의 길이가 2인 원이 직선 $y=k$와 한 점에서 만난다.

따라서 $|f(2)-k|=|17-k|=2$

$k=19$ 또는 $k=15$



(i) $k=19$일 때

중심이 $(4,\ f(4))$인 원의 반지름의 길이는 4이고 원의 중심과 직선 $y=19$ 사이의 거리는 $19-f(4)=4$이므로 원과 직선 $y=19$는 한 점에서 만난다.

$\therefore\ g(4)=1$

중심이 $(6,\ f(6))$인 원의 반지름의 길이는 6이고 원의 중심과 직선 $y=19$ 사이의 거리는 $19-f(6)=10$이므로 원과 직선 $y=19$는 만나지 않는다.

$\therefore\ g(6)=0$

$g(4)\times g(6)=1\times0\neq2$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k=15$일 때

중심이 $(4,\ f(4))$인 원의 반지름의 길이는 4이고 원의 중심과 직선 $y=15$ 사이의 거리는 $15-f(4)=0$이므로 원과 직선 $y=15$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\therefore\ g(4)=2$

중심이 $(6,\ f(6))$인 원의 반지름의 길이는 6이고 원의 중심과 직선 $y=15$ 사이의 거리는 $15-f(6)=6$이므로 원과 직선 $y=15$는

한 점에서 만난다.

$\therefore\ g(6)=1$

$g(4)\times g(6)=2\times 1=2$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $k=15$

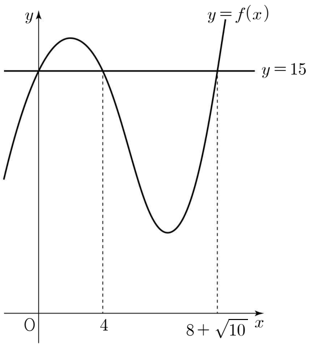
$f(x)=15$를 만족하는 x의 값은

$0<x<6$일 때

$-\frac{1}{2}(x-2)^2+17=15$에서 $x=4$

$x\geq 6$일 때

$(x-8)^2+5=15$에서 $x=8+\sqrt{10}$



원 C의 중심 $(t,\ f(t))$와 직선 $y=15$ 사이의 거리를 함수 $h(t)$라 하면

$$h(t)=\begin{cases} f(t)-15 & (0<t\leq 4) \\ 15-f(t) & (4<t\leq 8+\sqrt{10}) \\ f(t)-15 & (t>8+\sqrt{10}) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -\frac{1}{2}t^2+2t & (0<t\leq 4) \\ \frac{1}{2}t^2-2t & (4<t\leq 6) \\ -t^2+16t-54 & (6<t\leq 8+\sqrt{10}) \\ t^2-16t+54 & (t>8+\sqrt{10}) \end{cases}$$

함수 $h(t)$는 원 C의 중심 $(t,\ f(t))$와 직선 $y=15$ 사이의 거리이고 t는 원 C의 반지름의 길이이므로 원 C가 직선 $y=15$와 만나는 서로 다른 점의 개수인 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$h(t)>t$이면 $g(t)=0$

$h(t)=t$이면 $g(t)=1$

$h(t)<t$이면 $g(t)=2$

방정식 $h(t)=t$를 만족하는 t를 구하면

$0<t\leq 4$에서 $-\frac{1}{2}t^2+2t=t$이므로 $t=2$

$4<t\leq 6$에서 $\frac{1}{2}t^2-2t=t$이므로 $t=6$

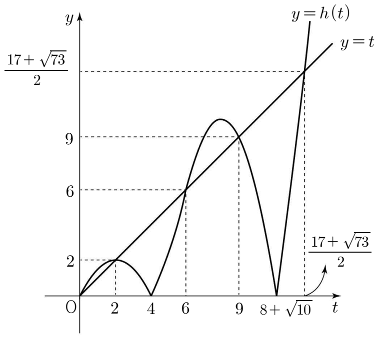
$6<t\leq 8+\sqrt{10}$에서

$-t^2+16t-54=t$이므로 $t=9$

$t>8+\sqrt{10}$에서

$t^2-16t+54=t$이므로 $t=\frac{17+\sqrt{73}}{2}$

함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=t$는 다음과 같다.



따라서

$0<t<2,\ 6<t<9,\ t>\frac{17+\sqrt{73}}{2}$에서 $g(t)=0$

$t=2,\ t=6,\ t=9,\ t=\frac{17+\sqrt{73}}{2}$에서 $g(t)=1$

$2<t<6,\ 9<t<\frac{17+\sqrt{73}}{2}$에서 $g(t)=2$

(ⅰ) $2<t<6$일 때

$\alpha-2<t<\alpha$에서 $g(t)=2$를 만족시키는

실수 α의 범위는 $4\leq\alpha\leq 6$

(ⅱ) $9<t<\frac{17+\sqrt{73}}{2}$일 때

$8<\sqrt{73}<9$

$\frac{25}{2}<\frac{17+\sqrt{73}}{2}<13$

$\frac{17+\sqrt{73}}{2}-9>2$이므로

$\alpha-2<t<\alpha$에서 $g(t)=2$를 만족시키는

실수 α의 범위는 $11\leq\alpha\leq\frac{17+\sqrt{73}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 실수 α의 최댓값은 $\frac{17+\sqrt{73}}{2}$

$m=17,\ n=73$

따라서 $m+n=90$