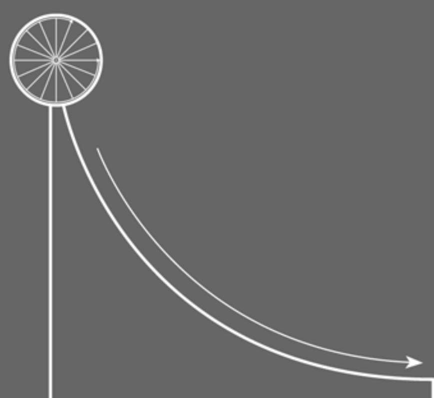
6강

최소 작용의 원리



레니는 좌절감을 맛보았다. 그의 키나 힘을 생각해 보았을 때
좋은 신호는 아니었다. 그의 머리도 상처를 입었다.
"조지, 난 이 모든 걸 다 기억할 수 없어. 힘, 질량, 뉴턴의 방정식, 운동량, 에너지.
물리를 하기 위해서는 이딴 걸 암기할 필요가 없다고 내게 말하지 않았나?
딱 하나만 기억하면 되게 할 수는 없나?"
"좋아, 레니. 진정하라고. 간단히 정리할게.
작용은 언제나 정적이다. 이것만 기억하라고."

연습 문제 1: 식 (4)는 뉴턴의 운동 방정식 $F=ma$의 또 다른 형태에 지나지 않다는 것을 보여라.

식 (4): $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$

해답: $L=T-V$을 식 (4)에 대입하면

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial(T-V)}{\partial x}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad \cdots \ (*)$$

이다. 각각의 항을 살펴보면 첫 번째 항은

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{d}{dt}m\dot{x}=m\ddot{x}$$

이고 두 번째 항은 x에만 의존하는 V의 $\dot{x}$에 대한 편미분이므로 0이다. 세 번째 항 역시 비슷하게 $\dot{x}$에만 의존하는 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$의 x에 대한 편미분이므로 0이다. 네 번째 항은 힘과 퍼텐셜 에너지의 관계에 의해 $\frac{\partial V}{\partial x}=-F=-m\ddot{x}$이다. 따라서 식 $(*)$은 다음과 같이 뉴턴의 운동 방정식으로 표현된다.

$$m\ddot{x}+0+0-F=0, \ \therefore \ F=m\ddot{x}.$$

연습 문제 2: 식 (6)은 뉴턴의 운동 방정식 $F_i = m_i \ddot{x}_i$의 또 다른 형태에 지나지 않음을 보여라.

식 (6): $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

해답: 연습 문제 1의 풀이 과정을 다차원 공간으로 일반화하면 된다. $L = T - V$를 식 (6)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial (T-V)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$$

$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2$이므로 첫 번째 항은

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \sum_i \frac{d}{dt} m \dot{x}_i = \sum_i m \ddot{x}_i$$

이다. 연습 문제 1과 마찬가지로 두 번째, 세 번째 항은 0이고, 네 번째 항은 $\frac{\partial V}{\partial x_i} = -F_i$이다.

$$\therefore \sum_i m \ddot{x}_i - F_i = 0$$

$$F_i = \sum_i m \ddot{x}_i.$$

연습 문제 3: 오일러–라그랑주 방정식을 써서 식 (12)의 라그랑지안의 운동 방정식을 유도하라.

식 (12): $L=\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}(X^2+Y^2)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)$

해답: 2차원 공간 (X, Y)의 운동이므로 X, Y 각각에 대한 오일러–라그랑주 방정식이 존재한다.

① X에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}-\frac{\partial L}{\partial X}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}=\frac{\partial}{\partial \dot{X}}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}(X^2+Y^2)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\dot{X}+m\omega Y.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}=m\ddot{X}+m\omega\dot{Y}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}(X^2+Y^2)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\omega^2X-m\omega\dot{Y}.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}-\frac{\partial L}{\partial X}=m\ddot{X}+m\omega\dot{Y}-\left(m\omega^2X-m\omega\dot{Y}\right)$$

$$=m\ddot{X}-m\omega^2X+2m\omega\dot{Y}=0.$$

$$\therefore\ \ddot{X}=\omega^2X-2\omega\dot{Y}.$$

② Y에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}-\frac{\partial L}{\partial Y}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}=\frac{\partial}{\partial \dot{Y}}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\dot{Y}-m\omega X.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}=m\ddot{Y}-m\omega\dot{X}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\omega^2 Y+m\omega\dot{X}.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}-\frac{\partial L}{\partial Y}=m\ddot{Y}-m\omega\dot{X}-\left(m\omega^2 Y+m\omega\dot{X}\right)$$

$$=m\ddot{Y}-m\omega^2 Y-2m\omega\dot{X}=0.$$

$$\therefore\ \ddot{Y}=\omega^2 Y+2\omega\dot{X}.$$

연습 문제 4: 극 좌표에서 조지의 라그랑지안과 오일러–라그랑주 방정식을 계산하라.

해답: (X, Y)에 대한 조지의 라그랑지안(연습 문제 3의 라그랑지안과 동일)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(X^2 + Y^2\right) + m\omega\left(\dot{X}Y - \dot{Y}X\right)$$

을 극 좌표 (r, θ)에 대한 라그랑지안으로 바꾸기 위해 다음의 관계식을 이용한다.

$$X = r\cos\theta,\ \ Y = r\sin\theta.$$

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}(r\cos\theta) = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,$$

$$\dot{Y} = \frac{d}{dt}(r\sin\theta) = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta.$$

이때 θ는 시간에 따른 각도 함수이므로

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}\cos\theta = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\sin\theta = \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\cos\theta.$$

주어진 라그랑지안에 대입하면

$$L=\frac{m}{2}\left\{\left(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\left(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right\}$$

$$+\frac{m\omega^2}{2}\left\{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right\}$$

$$+m\omega\left\{\left(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\right)r\sin\theta-\left(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\right)r\cos\theta\right\}$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{r}^2\cos^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$+\dot{r}^2\sin^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta)$$

$$+\frac{m\omega^2}{2}\left(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right)$$

$$+m\omega\left(r\dot{r}\sin\theta\cos\theta-r^2\dot{\theta}\sin^2\theta-r\dot{r}\sin\theta\cos\theta-r^2\dot{\theta}\cos^2\theta\right)$$

$$=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}r^2-m\omega r^2\dot{\theta}.$$

2차원 공간 (r,θ)에서의 운동이므로 r, θ 각각에 대한 오일러–라그랑주 방정식이 존재한다.

① r에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+m\omega^2r-2m\omega r\dot{\theta}$$

$$\therefore\ m\ddot{r}-\left(mr\dot{\theta}^2+m\omega^2r-2m\omega r\dot{\theta}\right)=0$$

$$\ddot{r}=-\omega^2r+r\dot{\theta}^2-2\omega r\dot{\theta}.$$

② θ에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0.$$

$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$ 꼴로 표현한 이유는 $mr^2\dot{\theta}$이 각운동량이기 때문이다. θ에 대한 오일러–라그랑주 방정식은 각운동량 보존 법칙을 나타낸다.

연습 문제 5: 이 결과들을 이용해서 길이 l인 진자의 운동을 예측하라.

해답: 진자의 위치와 속도를 극 좌표로 표현하면 다음과 같다.

$$(x, y) = (l\sin\theta, -l\cos\theta)$$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{\theta}\, l\cos\theta, \dot{\theta}\, l\sin\theta). \because\ \dot{l} = 0.$$

따라서

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2 l^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2\sin^2\theta\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgy = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

이다. 라그랑지안이 θ에 대한 1변수 함수이므로 1개의 오일러–라그랑주 방정식이 존재한다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - mgl(-\sin\theta) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0.$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

θ가 충분히 작을 경우 다음과 같은 근사법을 통해 진자는 단순 조화 운동을 한다.

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta,\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$\therefore\ \theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,\theta\right).$$

$\theta_0 = \theta(0)$은 진자의 진폭이다. 충분히 작은 각도로 진동하는 진자는 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$의 주기를 갖는 단순 조화 운동을 한다.

연습 문제 6: 다음 변환을 어떻게 유도했는지 설명하라.

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right),\ x_+=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$x_-=\frac{x_1-x_2}{2}\ \rightarrow\ \ T=m\left(\dot{x}_+^2+\dot{x}_-^2\right).$$

해답:

$$x_+ + x_- = \frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}=x_1$$

$$x_+ - x_- = \frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}=x_2.$$

$$\dot{x}_1=\dot{x}_+ + \dot{x}_-,\ \dot{x}_2=\dot{x}_+ - \dot{x}_-.$$

$$\therefore\ \ T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)=\frac{m}{2}\left\{\left(\dot{x}_+ + \dot{x}_-\right)^2+\left(\dot{x}_+ - \dot{x}_-\right)^2\right\}$$

$$=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_+^2+2\dot{x}_+\dot{x}_-+\dot{x}_-^2+\dot{x}_+^2-2\dot{x}_+\dot{x}_-+\dot{x}_-^2\right)$$

$$=\frac{m}{2}\left(2\dot{x}_+^2+2\dot{x}_-^2\right)$$

$$=m\left(\dot{x}_+^2+\dot{x}_-^2\right).$$