01 원순열

원순열

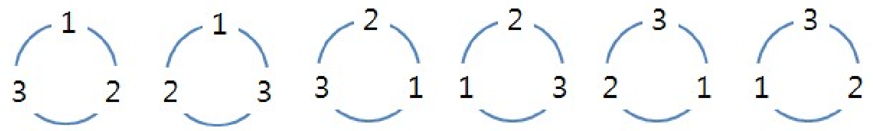
n개의 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

▷ 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우는 다음과 같이 6가지 경우가 나온다.

$$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$$

위의 서로 다른 6가지를 원형으로 배열하면 아래 그림과 같다.



이 중에서 첫 번째, 네 번째, 다섯 번째와 두 번째, 세 번째, 여섯 번째는 서로 상대적인 위치가 같다. 이와 같이 회전하여 일치하는 경우는 모두 같은 것으로 정할 때, 원형으로 배열하는 순열을 원순열 이라고 한다.

따라서 위 6가지 경우 중, 3가지가 겹치게 되므로 원순열의 수는 $\frac{3!}{3} = 2!$이 된다.

▷ 일반적으로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하면 회전방향이 같아지는 것이 n개씩 있게 되므로 원순열의 수는 순열의 수의 $\frac{1}{n}$이 된다. 즉,

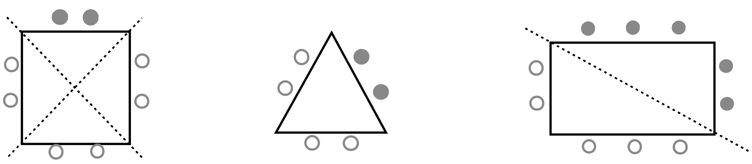
$$(\text{원순열의 수}) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

▷ 원형이 아닌 다각형인 경우(대칭인 경우)의 순열의 수

1) 정사각형의 식탁에 n명을 앉히는 방법의 수 $\Rightarrow (n-1)! \times \frac{n}{4}$

2) 정삼각형의 식탁에 n명을 앉히는 방법의 수 $\Rightarrow (n-1)! \times \frac{n}{3}$

3) 직사각형의 식탁에 n명을 앉히는 방법의 수 $\Rightarrow (n-1)! \times \frac{n}{2}$



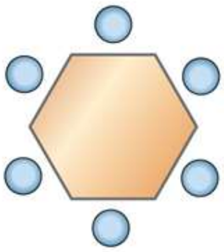
6명의 학생 중 4명의 학생을 뽑아 원탁에 앉히는 방법의 수를 구하시오.

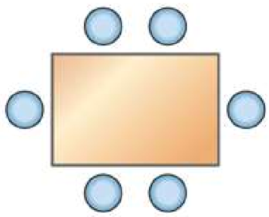
$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_4}{4} = 90$ (가지)

여섯 명의 학생 A, B, C, D, E, F가 원형의 탁자에 둘러앉을 때, A, B, C 가 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오.

세 명의 학생 A, B, C 한 묶음으로 생각하면, 모두 4명을 원형으로 배열하는 원순열이므로 그 경우의 수는 $(4-1)! = 6$
이때, 각각의 경우에 대하여 A, B, C가 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ (가지)

다음 그림과 같은 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 경우의 수를 구하시오

(1) 

(2) 

(1) $\dfrac{6!}{6} = 5! = 120$ (가지)

(2) $(6-1)! \times \dfrac{6}{2} = 5! \times 3 = 360$ (가지)

02 중복순열

중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_{n}\Pi_{r}=n^{r}$$

▷ 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허용하여 r개를 뽑아 일렬로 배열할 때, 첫째 자리에 올 수 있는 원소의 개수는 n개이고, 둘째 자리에 올 수 있는 원소의 개수도 n개다. 이런식으로 생각하면 각 자리에 올 수 있는 원소의 개수가 모두 n개씩 이므로 다음이 성립한다.

$${}_{n}\Pi_{r}=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^{r}$$

1, 2, 3, 4의 네 숫자를 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수를 α, 중복 사용하여 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수를 β라고 할 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오.

$\alpha={}_{4}\mathrm{P}_{3}=4\times3\times2=24$

$\beta={}_{4}\Pi_{3}=4\times4\times4=64$

$\therefore\ \beta-\alpha=40$

0, 1, 2, 3, 4의 다섯 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구하시오.

천의 자리에는 0을 제외한 1, 2, 3, 4만 올 수 있으므로 경우의 수는 4가지

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4가 모두 올 수 있으므로 경우의 수는 ${}_{5}\Pi_{3}=5^{3}=125$ 가지

따라서 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $4\times125=500$ (개)

03 같은 것이 있는 순열

같은 것이 있는 순열

n개 중 p개, q개, r개, $\cdots$, s개가 각각 같은 것일 때, 이들을 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times\cdots\times s!} \quad (\text{단, } n=p+q+r+\cdots+s)$$

▷ 네 개의 알파벳 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수

a, b, c, d 네 개의 알파벳을 배열하는 방법의 수는 $4!$가지인데, 만약 d가 a로 바뀌게 되면 a, d가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수만큼 겹치게 된다. 예를 들어, c, a, b, d와 c, d, b, a는 서로 다르지만, d가 a로 바뀌게 되면 둘 다 c, a, b, a가 되어 같은 경우가 된다. 즉, a, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수 $4!$을 a, d가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$로 나누어 주어야 한다. 따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$(가지)이다.

▷ 네 개의 알파벳 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수

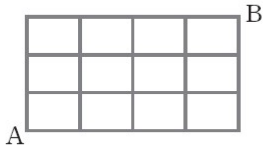
a, b, c, d 를 일려롤 나열한 후, c는 a로 바뀌고 d는 b 바뀌었다고 생각하면 a, c가 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$만큼 겹치고 동시에 b, d가 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$만큼 겹친다는 것을 알 수 있다. 따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$(가지)이다.

tomorrow의 8개 알파벳을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

8개의 알파벳 중에 o가 세 개, r이 두 개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times 3!}=3360$(가지)이다.

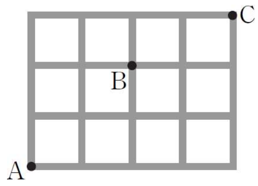
오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수를 구하시오.



A에서 B까지 최단 경로로 가려면 오른쪽이나 위쪽으로만 이동해야 한다.
결과적으로 오른쪽으로 4번, 위쪽으로 3번 이동해야 하는데, 오른쪽으로 이동하는 것을 a, 위쪽으로 이동하는 것을 b라고 나타내면 최단 거리 경로의 수는
$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b$를 나열하는 경우의 수와 같게 된다.

따라서 구하는 경로의 수는 $\dfrac{7!}{4! \times 3!} = 35$(가지) 가 된다.

오른쪽 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다.
A지점에서 C지점으로 갈 때, B지점을 거쳐서 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하시오.



A $\rightarrow$ B로 가는 방법의 수 $\dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$

B $\rightarrow$ C로 가는 방법 $\dfrac{3!}{2! \times 1!} = 3$

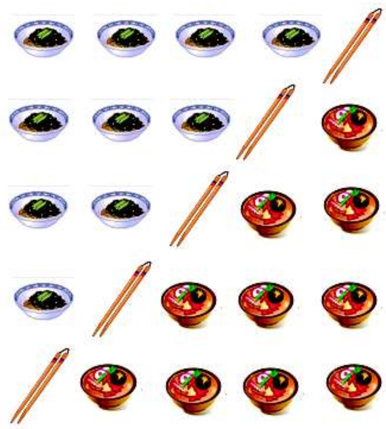
따라서 구하는 경로의 수는 $6 \times 3 = 18$ (가지)

04 중복조합

중복조합

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$$_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{n-1} = {}_{n+r-1}C_{r}$$



▷ 중국 음식점에 4명의 손님이 와서 자장면과 짬뽕을 주문하는 경우 주방장의 입장에서는 조리해야 하는 음식의 조합이 몇 가지가 가능한가를 생각해보자. 예를 들어, 네 개의 빈 그릇 사이사이와 양쪽 끝에 젓가락 하나를 두어 젓가락 왼쪽 그릇에는 자장면을 젓가락 오른쪽 그릇에는 짬뽕을 만들어 담는다고 하면 다음과 같은 5가지 경우가 가능하게 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 5개의 자리에서 젓가락을 놓을 자리 한 개를 선택하는 경우의 수 $_{5}C_{1}$와 같다.
또는 5자리에서 빈 그릇을 놓을 자리 4개를 선택하는 경우의 수 $_{5}C_{4}$와 같다고 생각해도 무방하다.
서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 빈 그릇과 $(n-1)$개의 젓가락을 일렬로 배열하는 방법의 수와 같다. 즉, 모두 $(n+r-1)$개의 자리에서 빈 그릇을 놓을 r개의 자리를 택하는 조합의 수와 같아진다. 따라서 $_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$이 된다.

다항식 $(x+y+z)^3$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

$(x+y+z)^3$을 전개할 때 생기는 각 항은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$x^3,\ x^2y,\ x^2z,\ \cdots,\ yz^2,\ z^3$$

따라서 구하는 항의 개수는 x, y, z중 순서를 고려하지 않고 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 서로 다른 항의 개수는 $_{3}H_{3} = {}_{3+3-1}C_{3-1} = {}_{5}C_{2} = 10$(가지)이다.

방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하시오.

방정식 $x+y+z=10$의 한 해 $x=2$, $y=3$, $z=5$는
x가 2개, y가 3개, z가 5개이고 이들을 $xxyyyzzzzz$와 같이 나타낼 수 있다.
이와 같이 주어진 방정식의 한 해는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 10개를 택하는 중복조합으로 볼 수 있다. 따라서 구하는 해의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$(개)이다.

집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$를 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오.

(2) X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$를 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오.

(1) 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 순서 없이 3개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$(개)

(2) 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 순서 없이 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$(개)

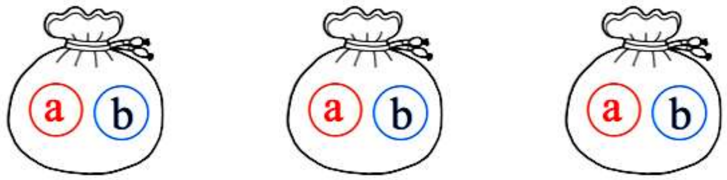
01 이항정리

이항정리

n이 자연수일 때,

$$(a+b)^n = {}_nC_0\,a^n + {}_nC_1\,a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_n b^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,a^{n-r}b^r$$

▷ 다항식 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$의 전개식에서 a^2b의 계수는 3개의 인수 $a+b$, $a+b$, $a+b$ 중 어느 한 인수에서 b를 택하고 나머지 두 인수에서 각각 a를 택하는 조합의 수 ${}_3C_1 = 3$과 같다. 이런 상황을 다음과 같이 생각할 수 있다.



주머니 A　　주머니 B　　주머니 C

세 개의 주머니 A, B, C에 a로 표시된 공과 b로 표시된 공이 각각 하나씩 들어 있다고 다고 한다. 각 주머니에서 공을 하나씩 꺼내어 그 공에 적힌 문자들을 곱하면 다음과 같이 4가지의 항 a^3, a^2b, ab^2, b^3을 얻게 되고, 그 중에 a^2b항은 3번 등장하는 것을 볼 수 있다.

A	a	a	a	b	a	b	b	b
B	a	a	b	a	b	a	b	b
C	a	b	a	a	b	b	a	b
문자의 곱	a^3	a^2b	a^2b	a^2b	ab^2	ab^2	ab^2	b^3

즉, a^2b가 나오는 경우는 세 가지가 있고, 이것이 바로 $(a+b)^3$의 전개식에서 a^2b항의 계수가 된다. 결국 $(a+b)^3$의 전개식에서 a^2b항의 계수를 세 개의 주머니에서 b가 나오는 주머니 1개를 선택하는 경우의 수 ${}_3C_1 = 3$로 생각할 수 있다.

$$(a+b)^3 = {}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2b + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3$$

▷ 이것을 일반적으로 확장시키면 $(a+b)^n$은

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

에서 우변 $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$의 n개의 인수 중 r개의 인수에서 각각 b를 택하고, 남은 $(n-r)$개의 인수에서 각각 a를 택하여 곱하면 $a^{n-r}b^r$이 된다. 여기서 그 계수는 n개의 인수 중 r개의 인수에서 b를 택하는 방법의 수인 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같다.
이때, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여 각 항의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$의 꼴이고, 다음과 같은 전개식을 얻는다.

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

이항정리를 이용하여 $(3x-2y)^4$을 전개하시오.

$$(3x-2y)^4 = {}_4\mathrm{C}_0(3x)^4 + {}_4\mathrm{C}_1(3x)^3(-2y)^1\ {}_4\mathrm{C}_2(3x)^2(-2y)^2$$
$$+ {}_4\mathrm{C}_3(3x)^1(-2y)^3 + {}_4\mathrm{C}_4(-2y)^4$$
$$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$$

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오.

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$이다.

이때 $(2x)^{7-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r = 2^{7-r}\times(-1)^r\times x^{7-2r}$이고 $7-2r=3$에서 $r=2$ 이다.

$r=2$일 때 ${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r = {}_7\mathrm{C}_2(2x)^5\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 21\times32x^5\times x^{-2} = 672x^3$ 이다.

따라서 x^3의 계수는 672이다.

이항계수의 성질

1) ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r$

2) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

3) ${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n(-1)^n = 0$

4) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots = 2^{n-1}$

5) ${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots = 2^{n-1}$

▷ 파스칼의 삼각형으로부터 1)이 성립함을 알 수도 있고, 다음과 같이 성립함을 보일 수도 있다.

$$\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r &= \frac{(n-1)!}{(n-r)! \times (r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! \times r!} \\
&= \frac{r(n-1)!}{(n-r)! \times r!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{(n-r)! \times r!} \\
&= (n-1)!\left\{\frac{r+(n-r)}{(n-r)! \times r!}\right\} \\
&= \frac{n!}{(n-r)! \times r!} \\
&= {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

▷ $(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\,x + {}_n\mathrm{C}_2\,x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\,x^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,x^n$ ⋯ ㉠ 은 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 항등식이다.

2) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n \quad \cdots \text{㉡}$$

3) ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n(-1)^n = 0 \quad \cdots \text{㉢}$$

4) ㉡+㉢에서 ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots = 2^{n-1}$

5) ㉡−㉢에서 ${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots = 2^{n-1}$

▷ $n=0$, 1, 2, 3, 4, 5일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은 다음과 같다.

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=1a+1b$

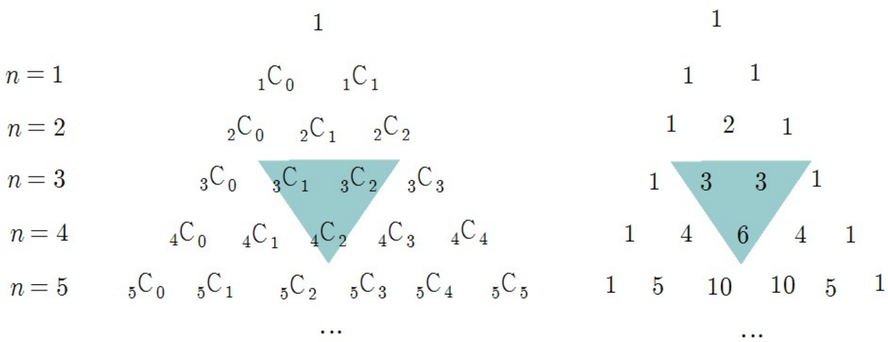
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$

$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$

$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$

이때, 각항의 계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다.



이 수의 배열에서 각 수는 그 수의 왼쪽 위와 오른쪽 위에 있는 두 수의 합과 같다. 예를 들어, 왼쪽 삼각형에서 ${}_3C_1+{}_3C_2={}_4C_2$가 됨을 오른쪽 삼각형에서 확인할 수 있다.
이와 같이 이항계수를 배열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

식 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$ 의 값을 구하시오.

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$ 을 이용하면

${}_2C_0+{}_3C_1={}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$

${}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$

${}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$

$\vdots$

${}_9C_6+{}_9C_7={}_{10}C_7$

${}_{10}C_7+{}_{10}C_8={}_{11}C_8$

$\therefore\ {}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8={}_{11}C_8=165$

다음 식의 값을 구하시오.

(1) ${}_8\mathrm{C}_0+{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_3+\cdots+{}_8\mathrm{C}_8$

(2) ${}_9\mathrm{C}_0-{}_9\mathrm{C}_1+{}_9\mathrm{C}_2-{}_9\mathrm{C}_3+\cdots-{}_9\mathrm{C}_9$

(1) ${}_8\mathrm{C}_0+{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_3+\cdots+{}_8\mathrm{C}_8=2^8=256$

(2) ${}_9\mathrm{C}_0-{}_9\mathrm{C}_1+{}_9\mathrm{C}_2-{}_9\mathrm{C}_3+\cdots-{}_9\mathrm{C}_9=0$

자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{2k}\mathrm{C}_1+{}_{2k}\mathrm{C}_3+{}_{2k}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2k}\mathrm{C}_{2k-1}\right)$ 일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{2k}\mathrm{C}_1+{}_{2k}\mathrm{C}_3+{}_{2k}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2k}\mathrm{C}_{2k-1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(2\times 4^{k-1}\right)=\frac{2\left(4^n-1\right)}{4-1}=\frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$$

$$\therefore\ f(5)=\frac{2}{3}\left(4^5-1\right)=\frac{2}{3}\times 1023=682$$