

모의 논술고사 문제 해설 및 예시답안 (자연계열)

□ 문제 2

1. 출제 의도

함수의 표현, 연속함수의 정의, 미분과 적분과의 관계, 그리고 응용문제로 속도와 거리를 측정할 수 있는지를 평가하고자 한다.

【문제 2-1】

주어진 조건과 연속함수의 성질을 이용하여 상수 값들을 찾을 수 있는지 평가한다.

【문제 2-2】

주어진 속도를 함수 표현 방법으로 나타낼 수 있으며, 속도의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다.

【문제 2-3】

지수함수의 적분과 치환적분을 할 수 있으며, 정적분을 이용하여 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 문제 해설

【문제2】는 적분의 활용으로 거리를 미분하면 속도가 되며, 속도를 적분함으로 거리를 구할 수 있다는 것을 알아보려고 한다. 속도를 다루는 경우 속도는 연속이 되며, 속도가 각 구간에 따라 다르게 나타날 경우에 이를 함수로 나타낼 수 있는지를 알아본다. 이때 거리를 구하기 위하여 적분을 각 구간으로 나누어 계산할 수 있으며, 지수적분과 치환적분을 할 수 있는지를 평가하려고 한다.

【문제 2-1】

제시문에 따라 속도는 연속함수가 됨을 알 수 있는지 평가한다. 또한 연속함수의 정의에 의하여 우리는 주어진 시간 구간이 만나는 양 끝점에서 같은 값을 갖는다는 것을 이용하여 주어진 미지수의 값을 정할 수 있는지를 평가한다.

【문제 2-2】

제시문과 【문제 2-1】에서 주어진 미지수의 값을 이용하여 속도 $v(t)$ 의 정의역은 $[0, 5]$ 이고, 그 영역에서 주어진 함수를 나타내고 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다. 따라서 첫 구간 $[0, 1]$ 에서는 지수함수가 되고, 구간 $[1, 1.5]$ 에서는 직선이 되고, 구간 $[1.5, 4]$ 에서는 상수함수가 되며, 마지막 구간 $[4, 5]$ 에서는 위로 볼록한 이차함수가 된다는 것을 알고 있는지를 평가한다.

【문제 2-3】

【문제 2-2】에서 나누어진 구간에 따라서 정적분을 이용하여 거리를 구할 수 있는지 평가하며, 특별히 처음 구간 $[0, 1]$ 에서 지수함수의 정적분을 구할 수 있으며, 마지막 구간 $[4, 5]$ 에서 치환적분을 할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$t = 0$ 에서 $v(0) = 0$ 이고, $t = 1$ 에서 $v(1) = 60$ 인 것을 안다.	1
	$t = 1$ 에서 $v(1) = 60$ 이고, $t = 1.5$ 에서 $v(1.5) = 100$ 인 것을 안다.	1
	$t = 1.5$ 에서 $t = 4$ 까지 $v(t) = 100$ 인 것을 안다.	1
	$t = 4$ 에서 $v(4) = 100$ 이고, $t = 5$ 에서 $v(5) = 0$ 인 것을 안다.	1
	$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 의 모든 값을 정확히 구할 수 있다.	2
2-2	정의역 $[0, 5]$ 를 구간으로 각각 $[0, 1], [1, 1.5], [1.5, 4], [4, 5]$ 로 나누어 함수를 나타낼 수 있어야 한다.	2
	지수함수와 일차 및 이차함수의 그래프를 연속이 되도록 그릴 수 있다.	2
2-3	거리를 구하기 위하여 구간을 나누어 정적분을 구할 수 있다.	2
	지수함수의 정적분을 할 수 있다.	1
	치환적분을 할 수 있다.	1
	구하는 거리를 정확히 구할 수 있다.	1

각 문항의 합산 점수를 기준으로 다음과 같은 배점을 적용한다.

문제 2-1) 6점: A, 5-4점: B, 3점: C, 2점: D, 1-0점: E

문제 2-2) 4점: A, 2점: C, 0점: E

문제 2-3) 5점: A, 4점: B, 3-2점: C, 1점: D, 0점: E

※ 하위 문제에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문제의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시 답안

【문제 2-1】

속도 $v(t)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 정지 상태에서 1시간 후 $60(km/h)$ 이 되므로, $t = 0$ 에서 0이고 $t = 1$ 에서 속도가 $60(km/h)$ 이 된다. 즉

$$v(0) = 0, v(1) = 60$$

따라서 우리는 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$v(0) = a_1 e^0 + a_2 = a_1 + a_2 = 0, v(1) = a_1 e + a_2 = 60$$

이를 풀면 다음을 얻는다.

$$a_1 = \frac{60}{e-1}, a_2 = -\frac{60}{e-1} = \frac{60}{1-e}$$

고속도로로 들어서면서부터 $v(t) = b_1 t + b_2$ 의 속도로 30분(0.5시간) 동안 60 km/h 로부터 100 km/h 가 되었으므로, 구간 $[1, 1.5]$ 에서 $v(1) = 60, v(1.5) = 100$ 이 된다. 따라서 다음 연립방정식

$$v(1) = b_1 + b_2 = 60, v(1.5) = (1.5)b_1 + b_2 = 100$$

을 풀면 $b_1 = 80, b_2 = -20$ 을 얻는다. 즉 구간 $[1, 1.5]$ 에서 속도는

$$v(t) = 80t - 20$$

이 된다.

같은 방법으로 지방도로에서는 구간 $[4, 5]$ 에서 $100(\text{km/h})$ 에서 정지 상태가 되므로, $v(t) = c_1(t-4)^2 + c_2$ 로부터 다음 식을 얻는다. $v(4) = 100, v(5) = 0$. 따라서 우리는 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$v(4) = c_1(4-4)^2 + c_2 = c_2 = 100, v(5) = c_1(5-4)^2 + c_2 = c_1 + c_2 = 0$$

이를 풀면 다음을 얻는다. $c_1 = -100, c_2 = 100$. 즉 구간 $[4, 5]$ 에서 속도는 다음과 같다.

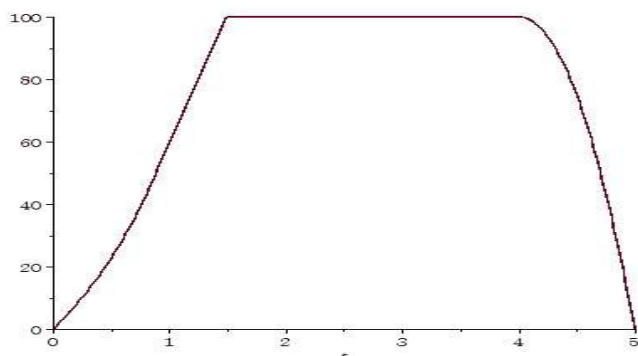
$$v(t) = -100(t-4)^2 + 100$$

【문제 2-2】

제시문으로부터 함수 $v(t)$ 의 정의역은 구간 $[0, 5]$ 이다. 따라서 함수 $v(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(t) = \begin{cases} \left(\frac{60}{e-1}\right)e^t + \left(\frac{60}{1-e}\right) & (0 \leq t \leq 1) \\ 80t - 20 & (1 \leq t \leq 1.5) \\ 100 & (1.5 \leq t \leq 4) \\ -100(t-4)^2 + 100 & (4 \leq t \leq 5) \end{cases}$$

따라서 $v(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



【문제 2-3】

구하는 거리를 s 라 하자. 제시문 (2)와 (3)으로부터 거리 s 는 속도를 적분하면 된다. 따라서 우리는 다음 적분을 구하면 된다.

$$s = \int_0^1 \left(\left(\frac{60}{e-1}\right)e^t + \left(\frac{60}{1-e}\right) \right) dt + \int_1^{1.5} (80t - 20) dt + \int_{1.5}^4 100 dt + \int_4^5 (-100(t-4)^2 + 100) dt$$

처음 적분은 지수함수 적분이므로 간단히 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{60}{e-1} \right) e^t + \left(\frac{60}{1-e} \right) \right) dt = \left[\left(\frac{60}{e-1} \right) e^t + \left(\frac{60t}{1-e} \right) \right]_0^1 = \frac{60(e-2)}{e-1}$$

두 번째 적분은 다음과 같다.

$$\int_1^{1.5} (80t - 20) dt = [40t^2 - 20t]_1^{1.5} = 40$$

세 번째 적분은 간단히 사각형의 넓이인 $100 \times 2.5 = 250$, 또는 다음과 같다.

$$\int_{1.5}^4 100 dt = [100t]_{1.5}^4 = 250$$

마지막 적분은 치환적분을 이용하여 다음과 같이 구한다. ($x = t - 4$ 로 치환하면 $dt = dx$ 이고 적분 구간은 $[4, 5]$ 에서 $[0, 1]$ 로 바뀌게 된다.)

$$\int_4^5 (-100(t-4)^2 + 100) dt = \int_0^1 (-100x^2 + 100) dx = \left[-\frac{100}{3}x^3 + 100x \right]_0^1 = \frac{200}{3}$$

따라서 구하는 거리는 다음과 같다.

$$\frac{1070}{3} + \frac{60(e-2)}{e-1} \text{ (km)}$$