2019학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 [가형] •

정 답

1	④	2	②	3	⑤	4	②	5	③
6	②	7	①	8	③	9	⑤	10	③
11	④	12	⑤	13	③	14	④	15	③
16	①	17	④	18	②	19	⑤	20	①
21	⑤	22	5	23	19	24	8	25	64
26	11	27	71	28	80	29	60	30	152

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3=4^1=4$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 12-\log_2 3=\log_2\dfrac{12}{3}=\log_2 4=2$

3. [출제의도] 부채꼴의 호의 길이 계산하기

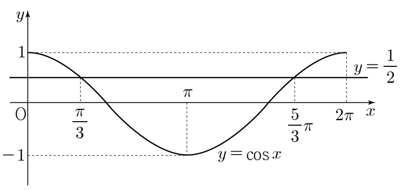
$r=6$, $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ 이고 $l=r\theta$ 이므로 $l=6\times\dfrac{5}{6}\pi=5\pi$

4. [출제의도] 지수함수를 이용하여 식의 값 계산하기

$5^x=\sqrt{3}$ 이므로 $5^{2x}=3$, $5^{-2x}=\dfrac{1}{3}$ 이다.

따라서 $5^{2x}+5^{-2x}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$ 이다.

5. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기



$2\cos x-1=0$ 을 정리하면 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 이므로

이 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$ 의 그래프와

직선 $y=\dfrac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x좌표와 같다.

그러므로 구하는 해는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$ 이다.

따라서 모든 해의 합은 2π 이다.

6. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=2^{x+3}-1$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y=-1$ 이므로 $k=-1$ 이다.

따라서 $f(-1)=2^{-1+3}-1=2^2-1=3$ 이다.

7. [출제의도] 상용로그표 이해하기

수	···	4	5	6	···
⋮		⋮	⋮	⋮	
5.9	···	.7738	.7745	.7752	···
6.0	···	.7810	.7818	.7825	···
6.1	···	.7882	.7889	.7896	···

상용로그표에서 $\log 6.04=0.7810$ 이므로

$\log\sqrt{6.04}=\dfrac{1}{2}\log 6.04=\dfrac{1}{2}\times 0.7810=0.3905$ 이다.

8. [출제의도] 삼각함수의 일반각 이해하기

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$ 이다.

원점 O와 점 $\mathrm{P}(5,\,12)$ 를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 하면 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$ 이다.

따라서 $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$ 이다.

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_5 18=\dfrac{\log 18}{\log 5}=\dfrac{\log 2+2\log 3}{\log 10-\log 2}=\dfrac{a+2b}{1-a}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 삼각함수의 주기가 $\dfrac{2\pi}{b}=\pi$ 이므로

$b=2$ 이다. 이 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이므로 $a+c=4$, $-a+c=-2$ 에서 $a=3$, $c=1$ 이다.

따라서 $2a+b+c=9$ 이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+a}$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값이 감소하므로 $x=-2$ 에서 최댓값을 가지고,

$x=4$ 에서 최솟값 $\dfrac{1}{8}$ 을 가진다.

$f(4)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4+a}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ 에서 $4+a=3$ 이므로

$a=-1$ 이고, $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$ 이다.

따라서 최댓값은 $f(-2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=8$ 이다.

12. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=2+\log_2 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -8만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2(x+8)+k+2$ 이다.

이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 $x=0$ 일 때 함숫값이 0 이상이어야 한다.

즉, $\log_2 8+k+2\ge 0$ 에서 $k\ge -5$ 이다.

따라서 실수 k 의 최솟값은 -5 이다.

13. [출제의도] 로그함수가 포함된 부등식 이해하기

로그의 진수 조건에 의해 $x+3>0$, $x-3>0$ 에서

$x>3$ …… ㉠

$\log_4(x+3)-\log_2(x-3)\ge 0$

$\log_4(x+3)\ge\log_{2^2}(x-3)^2$

$\log_4(x+3)\ge\log_4(x-3)^2$

로그의 밑이 1보다 크므로 $(x+3)\ge(x-3)^2$ 이다.

$x^2-7x+6\le 0$ 에서 $1\le x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $3<x\le 6$ 이고 자연수 x 는 4, 5, 6 이다.

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 15 이다.

14. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$15^x=8=2^3$ 에서 $15=2^{\frac{3}{x}}$ 이고,

$a^y=2$ 에서 $a=2^{\frac{1}{y}}$ 이다.

$15\times a=2^{\frac{3}{x}}\times 2^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}}=2^2=4$ 이므로

$a=\dfrac{4}{15}$ 이다.

15. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기

$B_1=\dfrac{kI_0 r_1^2}{2\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,

$B_2=\dfrac{kI_0(3r_1)^2}{2\left\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{kI_0\times 9r_1^2}{2\left(9x_1^2+9r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{9kI_0 r_1^2}{2\times 9^{\frac{3}{2}}\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{kI_0 r_1^2}{6\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{3}B_1$

이므로 $\dfrac{B_2}{B_1}=\dfrac{1}{3}$ 이다.

16. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 추론하기

$3+2\sin^2\theta=t$ 로 놓으면

$3+2\sin^2\theta+\dfrac{1}{3-2\cos^2\theta}=t+\dfrac{1}{\boxed{t-2}}$

이다. $0<\theta<2\pi$ 에서 $t\ge 3$ 이므로

$\boxed{t-2}>0$ 이다.

$t+\dfrac{1}{\boxed{t-2}}=t-2+\dfrac{1}{\boxed{t-2}}+2\ge 4$

이다. (단, 등호는 $t-2=\dfrac{1}{t-2}$ 에서 $t=\boxed{3}$ 일 때 성립한다.)

따라서 $3+2\sin^2\theta=t=3$ 일 때 $\theta=\boxed{\pi}$ 이고,

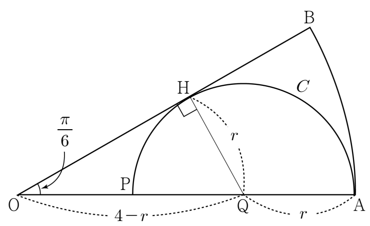
이때 $3+2\sin^2\theta+\dfrac{1}{3-2\cos^2\theta}$ 은 최솟값 4를 갖는다.

$f(t)=t-2$, $p=3$, $q=\pi$ 이므로

$$f(p)+\tan^2\left(q+\frac{\pi}{3}\right)=f(3)+\tan^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=1+3=4$$

이다.

17. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기



반원 C의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r 라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}=4$ 이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=4-r$ 이다. 선분 OB와 반원 C의 접점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{QH}}=r$ 이다.

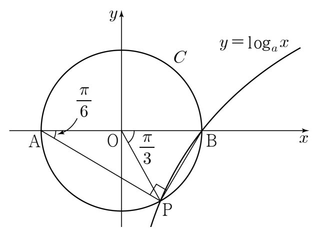
부채꼴의 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{r}{4-r}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $r=\dfrac{4}{3}$ 이다.

따라서 $S_1=\dfrac{1}{2}\times 4^2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{3}\pi$,

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\pi\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}\pi$ 이므로 $S_1-S_2=\dfrac{4}{9}\pi$ 이다.

18. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 로그함수 문제 해결하기



삼각형 APB는 빗변의 길이가 2인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}$이므로 $\angle \mathrm{BAP}=\frac{\pi}{6}$이다. 원점을 O라 하면 $\angle \mathrm{BOP}=\frac{\pi}{3}$이고, 점 P의 좌표는

$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

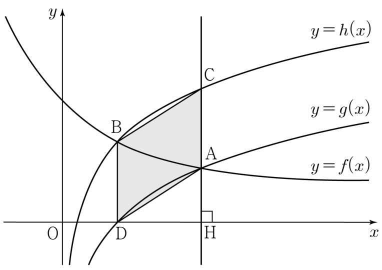
점 P는 함수 $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_a \frac{1}{2}$이다.

즉, $a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}$이므로 $a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$이다.

따라서 $a^{\sqrt{3}}=2^2=4$이다.

19. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제의 참, 거짓 추론하기



ㄱ. $f(1)=h(1)=a$이므로 점 B의 좌표는 $(1, a)$이다. (참)

ㄴ. 점 A는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이므로 점 A의 x좌표가 4일 때,

$\log_2 4=2^{1-4}+a-1$이므로 $a=\frac{23}{8}$이다.

$\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{CA}}$가 평행하고, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CA}}=a$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이다.

따라서 사각형 ACBD의 넓이는 $3\times\frac{23}{8}=\frac{69}{8}$이다. (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{AH}}=3:2$에서 $2\overline{\mathrm{CA}}=3\overline{\mathrm{AH}}$이다.

점 A의 x좌표를 k라 하면 $\overline{\mathrm{CA}}=a$, $\overline{\mathrm{AH}}=\log_2 k$이므로 $2a=3\log_2 k$이다. …… ㉠

또한 점 A는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이므로 $\log_2 k=2^{1-k}+a-1$이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{1-k}=1-\frac{a}{3}$이다.

$a>0$에서 점 A의 x좌표 k는 1보다 크다.

따라서 $0<2^{1-k}<1$이다.

그러므로 $0<1-\frac{a}{3}<1$에서 $0<a<3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. [출제의도] 로그함수를 이용하여 함숫값 추론하기

조건 (가)에서 $\left|\log_3 a-\log_3 b\right|\leq 1$이므로

$-1\leq\log_3\frac{a}{b}\leq 1$이고 $\frac{1}{3}\leq\frac{a}{b}\leq 3$이다.

이때, $b>0$이므로 $\frac{1}{3}b\leq a\leq 3b$이다.

조건 (나)에서 $a=3-b$이므로 $\frac{1}{3}b\leq 3-b\leq 3b$이고, 이 부등식의 해는 $\frac{3}{4}\leq b\leq\frac{9}{4}$이다. 한편,

$ab=(3-b)b=-\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\ \left(\frac{3}{4}\leq b\leq\frac{9}{4}\right)$

이므로 ab는 $b=\frac{3}{4}$ 또는 $b=\frac{9}{4}$에서

최솟값 $m=\frac{27}{16}$을 가진다.

그러므로 $f(m)=\log_3\frac{27}{16}=3-\log_3 16$이다.

따라서 $k=16$이다.

21. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 순서쌍의 개수 문제 해결하기

(ⅰ) p, q가 모두 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}$
$=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$

에서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

① $p+q+2=4$일 때, $(1, 1)$
② $p+q+2=8$일 때, $(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$
③ $p+q+2=12$일 때, $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 5)$, $(7, 3)$, $(9, 1)$
④ $p+q+2=16$일 때, $(5, 9)$, $(7, 7)$, $(9, 5)$
⑤ $p+q+2=20$일 때, $(9, 9)$이므로

모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 13이다.

(ⅱ) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times 3^{q+2}}$

에서 $p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로

$p+3=4$, 8, 12,

$q+2=4$, 8, 12이고,

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 10)$, $(5, 2)$, $(5, 6)$, $(5, 10)$, $(9, 2)$, $(9, 6)$, $(9, 10)$이므로

모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

(ⅲ) p는 짝수, q는 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}=\sqrt[4]{2^{q+3}\times 3^{p+2}}$

에서 $q+3$과 $p+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로

$p+2=4$, 8, 12,

$q+3=4$, 8, 12이고,

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 9)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 9)$, $(10, 1)$, $(10, 5)$, $(10, 9)$이므로

모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

(ⅳ) p, q가 모두 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$

에서 $p+q$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

① $p+q=4$일 때, $(2, 2)$
② $p+q=8$일 때, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$
③ $p+q=12$일 때, $(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$
④ $p+q=16$일 때, $(6, 10)$, $(8, 8)$, $(10, 6)$
⑤ $p+q=20$일 때, $(10, 10)$이므로

모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 13이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해 구하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 44이다.

22. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5^3}=5$

23. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함숫값 계산하기

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{17}{36}=\frac{19}{36}$이므로

$36\cos^2\theta=19$이다.

24. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

로그의 밑 조건에 의해 $a+3>0$, $a+3\neq 1$에서

$a>-3$, $a\neq -2$이다.

로그의 진수 조건에 의해 $-a^2+3a+28>0$에서

$a^2-3a-28<0$이므로 $-4<a<7$이다.

두 조건을 동시에 만족하는 범위는

$-3<a<-2$ 또는 $-2<a<7$이므로

정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 모든 정수 a의 개수는 8이다.

25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

$\mathrm{A}(k, 1+\log_2 k)$, $\mathrm{B}(k, \log_4 k)$이고 $k>1$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=(1+\log_2 k)-\log_4 k=1+\frac{1}{2}\log_2 k=4$에서

$\log_2 k=6$이다. 따라서 $k=2^6=64$이다.

26. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$x^a=b$에서 x는 b의 a제곱근이다.

(ⅰ) $a=5$일 때,

b의 5제곱근 중에서 실수인 것은 b의 값에 관계없이 오직 하나 존재한다. 따라서 실수인 x는

$\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{4}$

이므로 개수는 5이다.

(ⅱ) $a=6$일 때,

① $b>0$, 즉 $b=2$, 3, 4일 때, b의 a제곱근 중 실수인 것은 양수와 음수 각각 한 개씩 존재한다. 따라서 실수인 x는 $\sqrt[6]{2}$, $-\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[6]{4}$, $-\sqrt[6]{4}$이므로 개수는 6이다.

② $b<0$, 즉 $b=-3$, -2일 때, b의 a제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

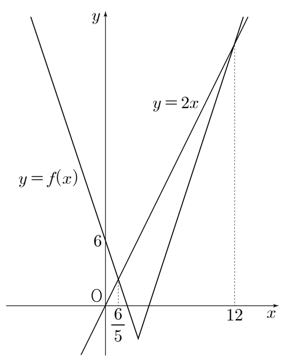
(ⅰ), (ⅱ)에서 공통인 x의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $n(C)=11$이다.

27. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 지수함수가 포함된 부등식 문제 해결하기

$2^{f(x)}\leq 4^x=2^{2x}$에서 밑이 1보다 크므로

$f(x)\leq 2x$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표를 구하자.



(ⅰ) $x<3$일 때, $-3x+6=2x$에서 $x=\frac{6}{5}$

(ⅱ) $x\geq 3$일 때, $3x-12=2x$에서 $x=12$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 부등식 $f(x)\leq 2x$의 해는

$\frac{6}{5}\leq x\leq 12$이므로 실수 x의 최댓값 M은 12이고

최솟값 m은 $\frac{6}{5}$이다.

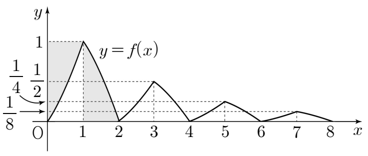
따라서 $M+m=12+\frac{6}{5}=\frac{66}{5}$이고 $p+q=71$이다.

28. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 함숫값 문제 해결하기

$2 \le \log_n k < 3$ 에서 $n^2 \le k < n^3$ 이고
로그의 밑 조건에 의해 $n > 1$ 이다.
1보다 큰 자연수 n에 대하여 $n^2 \le k < n^3$을 만족시키는 100이하의 자연수 k를 구하면 다음과 같다.
$n=2$: $4 \le k < 8$ 에서 $k=4, 5, 6, 7$
$n=3$: $9 \le k < 27$ 에서 $k=9, 10, \cdots, 26$
$n=4$: $16 \le k < 64$ 에서 $k=16, 17, \cdots, 63$
$n=5$: $25 \le k < 125$ 에서 $k=25, 26, \cdots, 100$
$n=6$: $36 \le k < 216$ 에서 $k=36, 37, \cdots, 100$
$n=7$: $49 \le k < 343$ 에서 $k=49, 50, \cdots, 100$
$n=8$: $64 \le k < 512$ 에서 $k=64, 65, \cdots, 100$
$n=9$: $81 \le k < 729$ 에서 $k=81, 82, \cdots, 100$
$n=10$: $100 \le k < 1000$ 에서 $k=100$
그러므로 k의 값에 따라 조건을 만족시키는 $f(k)$를 구하면 다음과 같다.
(i) $k=1, 2, 3$ 일 때, $f(k)=0$
(ii) $k=4, 5, 6, 7$ 일 때, $f(k)=1$
(iii) $k=8$ 일 때, $f(k)=0$
(iv) $k=9, 10, \cdots, 15$ 일 때, $f(k)=1$
(v) $k=16, 17, \cdots, 24$ 일 때, $f(k)=2$
(vi) $k=25, 26$ 일 때, $f(k)=3$
(vii) $k=27, 28, \cdots, 35$ 일 때, $f(k)=2$
(viii) $k=36, 37, \cdots, 48$ 일 때, $f(k)=3$
(ix) $k=49, 50, \cdots, 80$ 일 때, $f(k)=4$
(x) $k=81, 82, \cdots, 99$ 일 때, $f(k)=5$
(xi) $k=100$ 일 때, $f(k)=6$
따라서 $f(k)=4$가 되도록 하는 k의 최댓값은 80이다.

29. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기

조건 (가)에서
$$f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0 \le x \le 1) \\ 2-2^{x-1} & (1 < x \le 2) \end{cases}$$
이고, 조건 (나)에서
(i) $n=1$ 일 때, $2f(x)=f(x-2)$ $(2 < x \le 4)$
즉, $f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$ 이므로
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-3}-\frac{1}{2} & (2 < x \le 3) \\ 1-2^{x-4} & (3 < x \le 4) \end{cases}$$
(ii) $n=2$ 일 때, $2^2 f(x)=f(x-4)$ $(4 < x \le 6)$
즉, $f(x)=\frac{1}{4}f(x-4)$ 이므로
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-6}-\frac{1}{4} & (4 < x \le 5) \\ \frac{1}{2}-2^{x-7} & (5 < x \le 6) \end{cases}$$
(iii) $n=3$ 일 때, $2^3 f(x)=f(x-6)$ $(6 < x \le 8)$
즉, $f(x)=\frac{1}{8}f(x-6)$ 이므로
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-9}-\frac{1}{8} & (6 < x \le 7) \\ \frac{1}{4}-2^{x-10} & (7 < x \le 8) \end{cases}$$
이다. 따라서 $0 \le x \le 8$ 에서
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0 \le x \le 1$ 에서 함수 $y=2^x-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프는 $1 \le x \le 2$ 에서 함수 $y=2-2^{x-1}$ 의 그래프와 일치한다. 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $0 \le x \le 2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
같은 방법으로 $2 \le x \le 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$,
$4 \le x \le 6$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{4}$,
$6 \le x \le 8$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{8}$ 이다.
따라서 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$ 이므로
$32S=60$ 이다.

30. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 순서쌍의 개수 추론하기

(i) $a=c$ 일 때,
① $k<24$ 일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍은 존재하지 않는다.
② $24 \le k < 500$ 일 때,
$a^{\frac{1}{b}} \times c^{\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{b}} \times 24^{\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{5}}$
따라서 $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{b+d}{bd}=\frac{1}{5}$ 이므로
$bd=5(b+d)$ 이고
$bd-5b-5d=0$ 이 되어 $(b-5)(d-5)=25$ 이다.

$b-5$	1	5	25
$d-5$	25	5	1

$(b, d)=(6, 30), (10, 10), (30, 6)$ 이다.
$24 \le k < 30$ 이면 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(24, 10, 24, 10)$ 이므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 1이다.
$30 \le k < 500$ 이면 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(24, 6, 24, 30)$, $(24, 10, 24, 10)$, $(24, 30, 24, 6)$ 이므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 3이다.

(ii) $a \ne c$ 일 때,
$$24^{\frac{1}{5}}=(2\times 12)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\times 12^{\frac{1}{5}}=(2^p)^{\frac{1}{5p}}\times(12^q)^{\frac{1}{5q}} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$24^{\frac{1}{5}}=(3\times 8)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}\times 8^{\frac{1}{5}}=(3^p)^{\frac{1}{5p}}\times(8^q)^{\frac{1}{5q}} \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$24^{\frac{1}{5}}=(4\times 6)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\times 6^{\frac{1}{5}}=(4^p)^{\frac{1}{5p}}\times(6^q)^{\frac{1}{5q}} \quad \cdots\cdots ㉢$$
$$24^{\frac{1}{5}}=(24^2)^{\frac{1}{10}}=(24^3)^{\frac{1}{15}}=(24^4)^{\frac{1}{20}}=\cdots \quad \cdots\cdots ㉣$$
의 네 가지 경우가 있다.
한편, ㉠, ㉡, ㉢에서 두 자연수 p, q의 값이 커지면
순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수도 증가한다.
2^p, 3^p, 4^p, 6^q, 8^q, 12^q의 값은 각각 2 이상 k 이하
이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서
$2^6=64$, $3^4=81$, $2^7=128$, $12^2=144$, …을 이용하여 조건을 만족하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수가 59인 경우를 찾아보자.
① $64 \le k < 81$ 일 때,
㉠에서 $p=1, 2, 3, 4, 5, 6$, $q=1$,
즉, $5p=5, 10, 15, 20, 25, 30$, $5q=5$ 이다.
그런데 $a=2^p$, $c=12^q$ 인 경우와 $a=12^q$, $c=2^p$ 인
경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로
모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $6\times 1\times 2=12$ 이다.
㉡에서 $p=1, 2, 3$, $q=1, 2$,
즉, $5p=5, 10, 15$, $5q=5, 10$ 이다.
그런데 $a=3^p$, $c=8^q$ 인 경우와 $a=8^q$, $c=3^p$ 인
경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로
모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3\times 2\times 2=12$ 이다.
㉢에서 $p=1, 2, 3$, $q=1, 2$,
즉, $5p=5, 10, 15$, $5q=5, 10$ 이다.
그런데 $a=4^p$, $c=6^q$ 인 경우와 $a=6^q$, $c=4^p$ 인
경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로
모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3\times 2\times 2=12$ 이다.
한편, 음이 아닌 세 정수 p, q, r와 2이상인 자연수 n에 대하여
$$(24^n)^{\frac{1}{5n}}=(2^{3n}\times 3^n)^{\frac{1}{5n}}=\left\{(2^p\times 3^q)^r\times 2^{3n-pr}\times 3^{n-qr}\right\}^{\frac{1}{5n}}$$
이 성립한다.
㉣에서 ㉠, ㉡, ㉢ 이외의 순서쌍을 구하기 위해 위 식의
p, q, r, n에 자연수를 순차적으로 대입하자.
a 또는 c가 2, 3, 4, 6, 8, 12의 거듭제곱이 아닌
경우를 모두 구하면 다음과 같다.
$$24^{\frac{1}{5}}=(24^2)^{\frac{1}{10}}$$
$$=18^{\frac{1}{10}}\times 32^{\frac{1}{10}}=18^{\frac{1}{10}}\times 2^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{10}}\times 4^{\frac{1}{4}}$$
$$=18^{\frac{1}{10}}\times 8^{\frac{1}{6}}=18^{\frac{1}{10}}\times 16^{\frac{1}{8}}=18^{\frac{1}{10}}\times 64^{\frac{1}{12}}$$
$$=12^{\frac{1}{10}}\times 48^{\frac{1}{10}}=72^{\frac{1}{10}}\times 8^{\frac{1}{10}}=72^{\frac{1}{10}}\times 64^{\frac{1}{20}},$$

$$24^{\frac{1}{5}}=(24^7)^{\frac{1}{35}}=48^{\frac{1}{7}}\times 18^{\frac{1}{35}}$$
따라서 ㉣에서 ㉠, ㉡, ㉢ 이외의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $k<72$ 일 때 $8\times 2=16$, $k \ge 72$ 일때 $10\times 2=20$ 이다.
그러므로 (i)과 (ii)의 ①에서 $64 \le k < 72$ 일 때 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
$3+12+12+12+16=55$ 이므로 조건에 맞지 않고
$72 \le k < 81$ 일 때에는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3+12+12+12+20=59$ 이므로 조건에 맞다.
그러므로 k의 최솟값 m은 72이다.
② $k=81$ 일 때,
㉡에서 $p=1, 2, 3, 4$, $q=1, 2$,
즉, $5p=5, 10, 15, 20$, $5q=5, 10$ 이다.
①에서 구한 순서쌍 (a, b, c, d) 이외에도 4개의
순서쌍 (a, b, c, d)가 더 생긴다.
따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.
그러므로 k의 최댓값 M은 80이다.

따라서 $M+m=80+72=152$ 이다.