

모의 논술고사 문제 해설 및 예시답안 (자연계열)

□ 문제 3

1. 출제 의도

본 문제는 정규분포의 의미를 알고 표준정규분포표를 이용하여 주어진 상황의 확률을 구할 수 있는 지에 대해 평가하고자 한다.

1. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?
2. 조건부확률의 개념을 이해할 수 있는가?
3. 모집단의 분포가 정규분포일 때, 표본평균의 표본분포를 알고 표준정규분포표를 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는가?

2. 문제 해설

【문제 3-1】

실제 학생들의 키-측정된 학생들의 키의 확률변수가 정규분포를 따를 때 실제 키와 측정된 키의 차이를 정규분포표를 이용하여 확률로 계산할 수 있는지 평가한다.

【문제 3-2】

실제 학생들의 키와 측정된 학생들의 키의 차이가 주어졌을 때, 실제 키가 더 클 확률인 조건부 확률을 이해하고 구할 수 있는지 평가한다.

【문제 3-3】

정규분포로부터 추출된 표본의 표본평균의 표본분포를 구할 줄 알고 이 분포를 이용하여 확률을 구하고 원하는 상황을 만들어내는 표본의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문항 1	문제의 의미를 알지 못한다	E
	문제의 의미 정도만 이해한다	D
	문제의 의미를 알지만 정규분포의 확률식으로 표현하지 못한다	C
	문제의 의미를 알고 정규분포 $N(1,16)$ 으로 확률을 서술하지만 표준화를 모르고 표준정규분포의 확률로 구하지 못한다	B
	문제의 의미를 알고 표준화를 이용하여 표준정규분포의 확률로 구한다	A
문항 2	문제의 의미를 알지 못한다	E
	조건부확률인 것 정도만 이해한다	D
	조건부확률인 것은 알지만 정규분포의 확률식으로 표현하지 못한다	C
	조건부확률인 것은 알고 정규분포 $N(1,16)$ 으로 확률을 서술하지만 표준화를 모르고 표준정규분포의 확률로 구하지 못한다	B
	조건부확률임을 이해하고 표준화를 이용하여 표준정규분포의 확률로 구한다	A
문항 3	문제의 의미를 알지 못한다	E
	표본평균이 의미와 표본분포를 아는 정도이다	D
	표본평균이 의미와 표본분포를 알지만 정규분포의 확률식으로 표현하지 못한다	C
	표본평균이 의미와 표본분포를 알고 정규분포 $N(1,16)$ 으로 확률을 서술하지만 표준화를 모르고 표준정규분포의 확률로 구하지 못한다	B
	표본평균이 의미와 표본분포를 알고 표준화를 이용하여 표준정규분포의 확률로 구한다	A

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시 답안

【문제 3-1】

실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1인 경우는 $-1 \leq X \leq 1$ 일 확률과 같다. 즉, 주어진 표준정규분포표를 이용하면

$$\begin{aligned}
 P(-1 \leq X \leq 1) &= P\left(\frac{-1-1}{4} \leq \frac{X-1}{4} \leq \frac{1-1}{4}\right) \\
 &= P(-0.5 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.19
 \end{aligned}$$

이다. 여기서 Z 는 표준정규분포를 가지는 확률변수이다.

※ 위 풀이 과정의 모든 수식에서 등호를 제외하여도 무방함.

【문제 3-2】

실제 학생의 키가 측정된 학생의 키보다 큰 경우는 $0 \leq X \leq 1$ 인 경우이다. 그러므로, 실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1일 때, 실제 학생의 키가 측정된 학생의 키보다 클 확률은 다음의 조건부확률

$$P(0 \leq X \leq 1 | -1 \leq X \leq 1) = \frac{P(0 \leq X \leq 1, -1 \leq X \leq 1)}{P(-1 \leq X \leq 1)} = \frac{P(0 \leq X \leq 1)}{P(-1 \leq X \leq 1)}$$

이 된다. 여기서 분모는 문항 1의 결과에 의해 0.19이고 분자는

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1) &= P\left(\frac{0-1}{4} \leq \frac{X-1}{4} \leq \frac{1-1}{4}\right) \\ &= P(-0.25 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0.25) = 0.10 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 구하고자 하는 조건부확률은 $\frac{10}{19}$ 이다.

※ 위 풀이 과정의 모든 수식에서 등호를 제외하여도 무방함.

【문제 3-3】

임의추출된 n 명의 학생들로부터의 표본평균이 $-1 \leq \bar{X} \leq 1$ 일 확률을 구하면 다음과 같다. 먼저, $X \sim N(1, 16)$ 이므로 $\bar{X} \sim N\left(1, \frac{16}{n}\right)$ 이다. 그러므로, 주어진 표준정규분포표를 이용하면

$$\begin{aligned} P(-1 \leq \bar{X} \leq 1) &= P\left(\frac{-1-1}{4/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-1}{4/\sqrt{n}} \leq \frac{1-1}{4/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \end{aligned} \quad (*)$$

이다. 문항 1의 결과에 의하면 실제 키와 측정된 키의 차이의 확률 $P(-1 \leq X \leq 1)$ 은 0.19이므로 위 (*)의 확률은 0.38 이상이어야 하므로 표준정규분포표에 의하면 $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.17$ 을 만족하는 자연수 n 들 중 최소를 구하면 된다. 그러므로 $n \geq 5.4756$ 이므로 최소의 학생 수 n 은 6명이다.

※ 위 풀이 과정의 모든 수식에서 등호를 제외하여도 무방함.