• 수학 영역 •

가형 정답

1	⑤	2	③	3	④	4	④	5	①
6	②	7	①	8	⑤	9	④	10	⑤
11	②	12	①	13	③	14	④	15	③
16	①	17	③	18	②	19	②	20	⑤
21	④	22	15	23	24	24	96	25	48
26	176	27	31	28	11	29	74	30	42

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식 $A=x^2+y^2$, $B=2x^2+xy-y^2$에서

$A+B=(x^2+y^2)+(2x^2+xy-y^2)$

$=3x^2+xy$

2. [출제의도] 합집합의 원소의 합을 계산한다.

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{3,\ 5\}$에서

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+5=11$

3. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$i^2=-1$이므로

$i(2-i)=2i-i^2=2i-(-1)=2i+1=1+2i$

4. [출제의도] 좌표평면에서 외분점의 좌표를 계산한다.

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times a-1\times(-2)}{2-1},\ \dfrac{2\times b-1\times 0}{2-1}\right)$

즉 $(2a+2,\ 2b)$

이 점의 좌표가 $(10,\ 0)$이므로

$2a+2=10$, $2b=0$

$a=4$, $b=0$

따라서 $a+b=4$

[다른 풀이]

$\mathrm{P}(10,\ 0)$이라 하자.

점 P가 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이므로 점 B는 선분 AP의 중점이다.

$\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$, $\mathrm{P}(10,\ 0)$에서 선분 AP의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+10}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)$

즉 $(4,\ 0)$

이 점의 좌표와 점 B의 좌표가 같으므로

$a=4$, $b=0$

따라서 $a+b=4$

5. [출제의도] 함숫값과 역함수의 함숫값을 구한다.

$f(6)=4$

$f(2)=8$에서

$f^{-1}(8)=2$

따라서 $f(6)+f^{-1}(8)=4+2=6$

6. [출제의도] 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

$(a+b-c)^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2b(-c)+2(-c)a$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ca)$

$(a+b-c)^2=25$, $ab-bc-ca=-2$이므로

$25=a^2+b^2+c^2+2\times(-2)$

따라서 $a^2+b^2+c^2=25+4=29$

7. [출제의도] 이차부등식의 해를 구한다.

이차부등식 $x^2-8x+a\le 0$의 해가 $b\le x\le 6$이므로

$x^2-8x+a=(x-b)(x-6)$

$=x^2-(b+6)x+6b$

$8=b+6$, $a=6b$

$b=2$, $a=12$

따라서 $a+b=12+2=14$

[다른 풀이]

$x=6$일 때, $x^2-8x+a=0$이므로

$36-48+a=0$

$a=12$

$x^2-8x+12\le 0$

$(x-2)(x-6)\le 0$

$2\le x\le 6$

$b=2$

따라서 $a+b=12+2=14$

8. [출제의도] 조합을 이용하여 조건에 맞는 자연수의 개수를 구한다.

자연수의 첫 자릿수는 0이 될 수 없으므로 1이다.

1, □, 1, □, 1, □, 1, □, 1, □, 1, □

나머지 5개 1의 좌우 6개의 빈 자리 □에 3개의 0을 넣으면 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않는 아홉 자리의 자연수를 만들 수 있다. 따라서 구하는 자연수의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

9. [출제의도] 무리함수에서 역함수의 함숫값을 구한다.

함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}+3$에서

$f^{-1}(5)=k$라 하면

$f(k)=5$

$f(k)=\sqrt{2k-4}+3=5$

$\sqrt{2k-4}=2$

$2k-4=4$

따라서 $k=4$이므로 $f^{-1}(5)=4$

10. [출제의도] 곱의 법칙과 순열을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

A, B가 앉는 줄을 선택하는 경우의 수는 2, 한 줄에 놓인 3개의 좌석에서 2개의 좌석을 택하여 앉는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

그러므로 A, B가 같은 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는 $2\times6=12$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $12\times6=72$이다.

11. [출제의도] 판별식을 이용하여 절대부등식이 성립하도록 하는 정수 k의 개수를 구한다.

이차방정식 $x^2-2kx+2k+15=0$의 판별식을 D라 하자.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2kx+2k+15\ge 0$이 성립하려면 $D\le 0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\times(2k+15)\le 0$

$k^2-2k-15\le 0$

$(k-5)(k+3)\le 0$

$-3\le k\le 5$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 5$이므로 그 개수는 9이다.

12. [출제의도] 곱셈 공식의 변형을 이용하여 정육면체의 부피의 합을 구한다.

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하자.

한 정육면체의 모서리가 12개이고, 두 정육면체의 모든 모서리 길이의 합이 60이므로

$12(a+b)=60$, 즉 $a+b=5$

한 정육면체의 면이 6개이고, 두 정육면체의 겉넓이의 합이 126이므로

$6(a^2+b^2)=126$, 즉 $a^2+b^2=21$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$25=21+2ab$

$ab=2$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=5^3-3\times2\times5$

$=125-30$

$=95$

[다른 풀이]

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하자.

한 정육면체의 모서리가 12개이고, 두 정육면체의 모든 모서리 길이의 합이 60이므로

$12(a+b)=60$, 즉 $a+b=5$

한 정육면체의 면이 6개이고, 두 정육면체의 겉넓이의 합이 126이므로

$6(a^2+b^2)=126$, 즉 $a^2+b^2=21$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$25=21+2ab$

$ab=2$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=5\times(21-2)$

$=95$

13. [출제의도] 연립이차방정식의 해를 구한다.

$x^2-2xy-3y^2=0$

$(x-3y)(x+y)=0$에서

$x=3y$ 또는 $x=-y$

$x>0$, $y>0$이므로

$x=3y$

$x^2+y^2=20$에서

$(3y)^2+y^2=20$

$y^2=2$

$a>0$, $b>0$이므로 $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$

따라서 $a+b=4\sqrt{2}$

14. [출제의도] 곱의 법칙과 조합을 이용하여 숫자를 선택하는 경우의 수를 구한다.

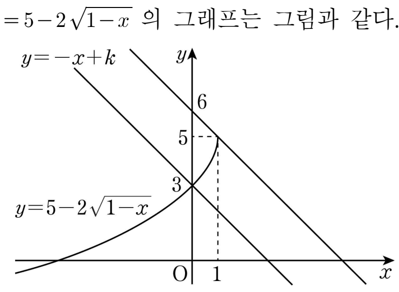
3개의 가로줄 중 2개의 가로줄을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

택한 2개의 가로줄 중 한 가로줄에서 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이고, 조건 (나)로부터 나머지 한 가로줄에서 이미 선택한 숫자와 다른 세로줄에 있는 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

따라서 조건을 만족시키도록 2개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 $3\times3\times2=18$이다.

15. [출제의도] 무리함수의 그래프와 직선의 교점에 관한 문제를 해결한다.

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때의 k의 값은

$5=-1+k$에서 $k=6$

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표를 구하면

$y=5-2=3$

직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 3)$을 지날 때의 k의 값은

$3=0+k$에서 $k=3$

따라서 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $3<k\le 6$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $4+5+6=15$이다.

16. [출제의도] 인수정리를 이용하여 주어진 성질이 성립함을 추론한다.

함수 $f(x)=x^2-(k+1)x+2k$ (k는 2가 아닌 실수)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-x=x^2-(k+2)x+2k$

$=(x-k)(\boxed{x-2})$

이다.

이때 $f(k)-k=0$, $f(2)-2=0$에서 $f(k)=k$, $f(2)=2$

함수 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에 대하여

$g(k)=f(f(k))=f(k)=\boxed{k}$

$g(2)=f(f(2))=f(2)=\boxed{2}$

$g(k)-k=0$, $g(2)-2=0$에서 다항식 $g(x)-x$는 $x-k$와 $\boxed{x-2}$를 인수로 가지므로

다항식 $g(x)-x$는 다항식 $(x-k)(x-2)$, 즉 $f(x)-x$로 나누어떨어진다.

$p(x)=x-2$, $q(k)=k$, $a=2$이므로

$p(5)+q(4)+a=3+4+2=9$

17. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 방정식을 구하는 문제를 해결한다.

점 $A(8,\ 6)$이므로 두 점 O, A를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<8)$이라 하면

$\overline{BI}=\frac{|3\times a-4\times 0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3a}{5}$

$\overline{BH}=8-a$

$\overline{BI}=\overline{BH}$에서

$\frac{3a}{5}=8-a$

$a=5$

그러므로 점 $B(5,\ 0)$이다.

두 점 $A(8,\ 6)$, $B(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{6-0}{8-5}(x-5)$

$y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=2+(-10)=-8$

[다른 풀이 1]

점 $A(8,\ 6)$이므로 $\overline{AH}=6$, $\overline{OH}=8$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{6^2+8^2}$

$=10$

$\overline{BH}=\overline{BI}=x$라 하면 $\overline{OB}=8-x$

두 삼각형 OBI와 OAH가 서로 닮음이므로

$\overline{OB}:\overline{BI}=\overline{OA}:\overline{AH}$

$(8-x):x=10:6$

$10x=48-6x$에서 $x=3$

그러므로 점 B의 좌표는 $(5,\ 0)$이다.

두 점 $A(8,\ 6)$, $B(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{6-0}{8-5}(x-5)$

$y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=2+(-10)=-8$

[다른 풀이 2]

직선 $y=mx+n$과 y축의 교점을 C라 하면 두 직선 OC, AH가 서로 평행하므로

$\angle OCB=\angle HAB$

$\overline{BI}=\overline{BH}$이고 $\overline{AB}$는 공통이므로 두 직각삼각형 AIB, AHB는 서로 합동이다.

따라서 $\angle BAI=\angle BAH$

삼각형 OAC에서 $\angle OAC=\angle OCA$이므로

$\overline{OC}=\overline{OA}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ -10)$이므로 직선 AC의 기울기 m은

$m=\frac{6-(-10)}{8-0}$

$=2$

y절편이 -10이므로

$n=-10$

따라서 $m+n=2+(-10)=-8$

18. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가)에서

$n(A)+n(B)=82$

$n(A\cup B)=65$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=82-65$

$=17$

따라서 한 은행만 이용하는 고객의 수는 $65-17=48$이고 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 각각 24명이다.

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-24=6$이다.

[다른 풀이]

조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수가 같으므로 이를 x라 하면 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는 $35-x$이고, 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-x$이다.

조건 (가)에서

$\{x+2(35-x)\}+\{x+2(30-x)\}=82$

$2x+(70-2x)+(60-2x)=82$

$2x=48$

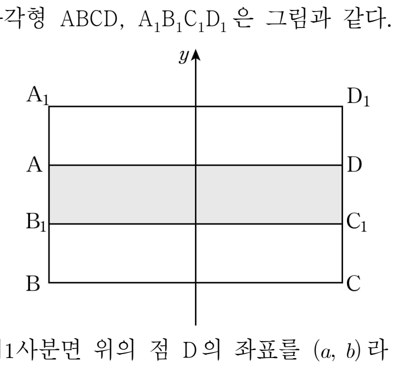
$x=24$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-24=6$이다.

19. [출제의도] 평행이동과 대칭이동을 이용하여 문제를 해결한다.

네 점 A, B, C, D를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 네 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자.

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 원점이고 각 변은 x축 또는 y축에 평행하며 $\overline{AD}>\overline{AB}>2$이므로 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 그림과 같다.



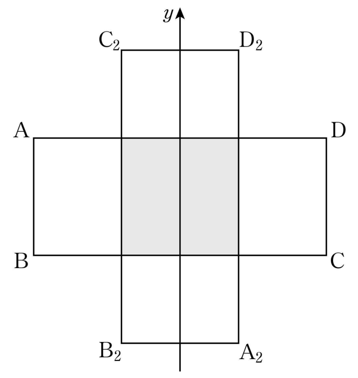
이때 제1사분면 위의 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $A(-a,\ b)$, $B(-a,\ -b)$, $C(a,\ -b)$이다.

점 B_1은 점 B를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로 $\overline{AD}=2a$, $\overline{AB_1}=2b-2$

조건 (가)에서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 18이므로

$2a\times(2b-2)=18$ …… ㉠

한편 직사각형 $A_2D_2C_2B_2$는 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이므로 두 직사각형 ABCD, $A_2D_2C_2B_2$는 그림과 같다.



조건 (나)에서 직사각형 $A_2D_2C_2B_2$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 16이고 그림에서 공통부분은 한 변의 길이가 선분 AB의 길이와 같은 정사각형이므로

$(2b)^2=16$

$b^2=4$

b는 양수이므로

$b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a=\frac{9}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AD}\times\overline{AB}=2a\times 2b=4ab=4\times\frac{9}{2}\times 2=36$

20. [출제의도] 인수정리와 이차방정식의 판별식을 이용하여 방정식의 근을 추론한다.

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$이므로 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\ & & 1 & 2a & b^2 \\ \hline & 1 & 2a & b^2 & 0 \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$이다.

이때 $a<b<0$이면 $a-b<0$, $a+b<0$이므로 $D>0$이 되어 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다. 한편 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 하고 $1+2a+b^2=0$이어야 한다.

예를 들어 $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$이면

$a<b<0$이고 $1+2a+b^2=0$이며,

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)$이므로

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 $-2a$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합은 $1+(-2a)=7$에서 $a=-3$

$x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b^2>0$이어야 하므로 $b^2<a^2=9$

또, $x=1$이 방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 근이 아니어야 하므로 $1+2a+b^2\neq 0$, 즉 $b^2\neq 5$

그러므로 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-3,\ -2)$, $(-3,\ -1)$, $(-3,\ 0)$, $(-3,\ 1)$, $(-3,\ 2)$

이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 연립이차방정식과 이차함수의 그래프를

이용하여 문제를 해결한다.

$f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-3=x^2-2x-3$

$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

따라서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$이므로

$x^2+2x+a=x$

$x^2+x+a=0$ …… ㉠

$x^2+2x+a=-x+2$

$x^2+3x+a-2=0$ …… ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-4(a-2)=17-4a$

(ⅰ) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$에서

$a<\frac{1}{4}$

$D_2<0$에서

$a>\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1=0$에서

$a=\frac{1}{4}$

$D_2=0$에서

$a=\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1<0$에서

$a>\frac{1}{4}$

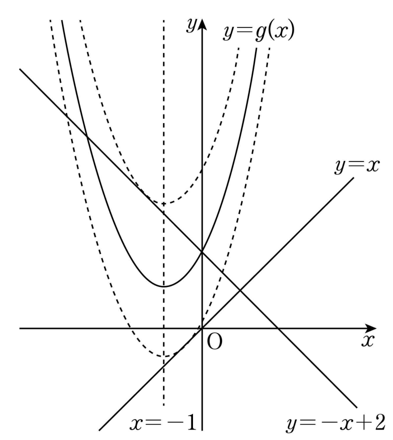
$D_2>0$에서

$a<\frac{17}{4}$

따라서 $\frac{1}{4}<a<\frac{17}{4}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 정수 a는 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4이다.

[참고]

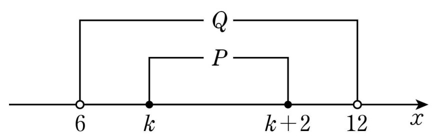


함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다. 즉, 이차함수의 그래프에서 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x$ 또는 $y=-x+2$와 만나는 모든 서로 다른 점의 개수가 2이어야 하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와는 만나지 않고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+2$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 즉, 방정식 ㉠의 실근의 개수가 0, 방정식 ㉡의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야만 한다.

22. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$${}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2=5+\frac{5\times4}{2\times1}$$
$$=5+10$$
$$=15$$

23. [출제의도] 충분조건을 이용하여 포함되는 집합을 구한다.



두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이므로

$k>6$, $k+2<12$

$6<k<10$

따라서 정수 k는 7, 8, 9이므로 정수 k의 값의 합은 $7+8+9=24$이다.

24. [출제의도] 함수의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

$x=1$일 때, $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4로 경우의 수는 2이다.

$x=2$일 때, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4로 경우의 수는 3이다.

$x=3$일 때, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4로 경우의 수는 4이다.

$x=4$일 때, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4로 경우의 수는 4이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times3\times4\times4=96$이다.

25. [출제의도] 집합의 포함관계를 이용하여 조건에 맞는 집합을 추론한다.

$\sqrt{25}=5$이므로

$A_{25}=\{1, 3, 5\}$

$1\le\sqrt{n}<7$이면

$A_n\subset A_{25}$이므로

$1\le n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

26. [출제의도] 인수분해를 이용하여 큰 수의 제곱근의 값을 구한다.

$x=10$이라 하면

$10\times13\times14\times17+36$

$=x(x+3)(x+4)(x+7)+36$

$=(x^2+7x)(x^2+7x+12)+36$

$=(x^2+7x)^2+12(x^2+7x)+36$

$=(x^2+7x+6)^2$

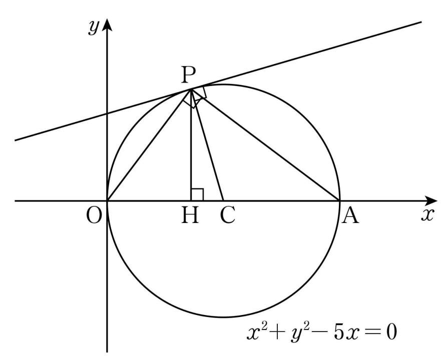
$=(100+70+6)^2$

$=176^2$

따라서

$\sqrt{10\times13\times14\times17+36}=176$

27. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 접선의 기울기를 구하는 문제를 해결한다.



원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이다.

원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle\mathrm{OPA}=90°$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}$

$=4$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OHP}=90°$

$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POH}$

$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{OPH}$ ($\because$ AA 닮음)

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$

$\frac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}=3:4$

$\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$이다.

$\mathrm{C}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이므로 직선 CP의 기울기는

$$\frac{-\frac{12}{5}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{5}}=\frac{-\frac{24}{10}}{\frac{7}{10}}$$
$$=-\frac{24}{7}$$

점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이고

두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=31$

[다른 풀이 1]

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이다.

원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle\mathrm{OPA}=90°$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}$

$=4$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OHP}=90°$

$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POH}$

$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{OPH}$ ($\because$ AA 닮음)

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$

$\frac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}=3:4$

$\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$이다.

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$과 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$를 x축의 방

향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 원과 점을 각각 C_1, P_1이라 하면

$C_1 : x^2+y^2=\frac{25}{4}$, $\mathrm{P}_1\left(-\frac{7}{10},\ \frac{12}{5}\right)$

원 C_1 위의 점 P_1에서의 접선의 방정식은

$-\frac{7}{10}x+\frac{12}{5}y=\frac{25}{4}$

위의 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{7}{10}}{\frac{12}{5}}=\frac{7}{24}$$

이고 이 직선은 원 C 위의 점 P에서의 접선과 서로 평행하므로 원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=31$

[다른 풀이 2]

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이다.

원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle \mathrm{OPA}=90°$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}\\&=\sqrt{5^2-3^2}\\&=4\end{aligned}$$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle \mathrm{OPA}=\angle \mathrm{OHP}=90°$

$\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{POH}$

$\triangle \mathrm{OAP} \backsim \triangle \mathrm{OPH}$ ($\because$ AA 닮음)

$\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OH}}$이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$5 : 3=3 : \overline{\mathrm{OH}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{PA}}$

$\frac{9}{5} : \overline{\mathrm{HP}}=3 : 4$

$\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이다.

점 P를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m\left(x-\frac{9}{5}\right)+\frac{12}{5}$

$5mx-5y-9m+12=0$

위의 직선이 원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$에 접하므로 원의 중심 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$과 직선 $5mx-5y-9m+12=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\frac{5}{2}$와 같다.

$$\frac{\left|\frac{25}{2}m-9m+12\right|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{\left|\frac{7}{2}m+12\right|}{5\sqrt{m^2+1}}=\frac{5}{2}$$

$25\sqrt{m^2+1}=|7m+24|$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$625m^2+625=49m^2+336m+576$

$576m^2-336m+49=0$

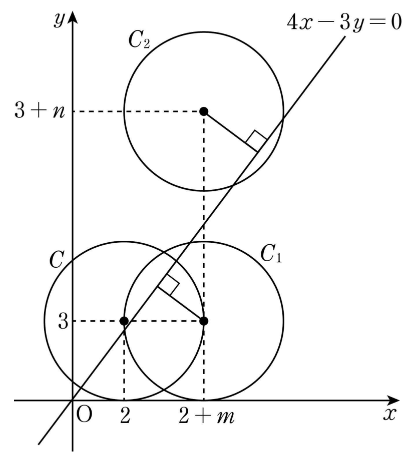
$(24m-7)^2=0$

$m=\frac{7}{24}$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=31$

28. [출제의도] 원의 방정식과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 원의 평행이동을 추론한다.



원 C_1의 중심의 좌표는 $(2+m,\ 3)$이므로 점 $(2+m,\ 3)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다. 즉,

$$\frac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<4m-1<15$

$-14<4m<16$

$-\frac{7}{2}<m<4$

조건 (가)를 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3이다.

(ⅰ) $m=1$일 때,

원 C_2의 중심의 좌표는 $(3,\ 3+n)$이므로 점 $(3,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$$\frac{|12-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<3n-3<15$

$-12<3n<18$

$-4<n<6$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 6이다.

(ⅱ) $m=2$일 때,

원 C_2의 중심의 좌표는 $(4,\ 3+n)$이므로 점 $(4,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$$\frac{|16-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<3n-7<15$

$-8<3n<22$

$-\frac{8}{3}<n<\frac{22}{3}$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 9이다.

(ⅲ) $m=3$일 때,

원 C_2의 중심의 좌표는 $(5,\ 3+n)$이므로 점 $(5,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$$\frac{|20-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<3n-11<15$

$-4<3n<26$

$-\frac{4}{3}<n<\frac{26}{3}$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 11이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $m+n$의 최댓값은 11이다.

29. [출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지 정리를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지가 $g(x)-2x^2$이고 나머지 $g(x)-2x^2$의 차수는 다항식 $g(x)$의 차수보다 작아야 하므로 다항식 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다. 즉,

$g(x)=2x^2+ax+b$(a, b는 상수)

조건 (가)를 식으로 나타내면

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)\{g(x)-2x^2\}+g(x)-2x^2\\&=\{g(x)+1\}\{g(x)-2x^2\}\\&=(2x^2+ax+b+1)(ax+b)\end{aligned}$$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x+b+1\right)\left(\frac{1}{2}x+b\right)$

조건 (나)에서 나머지 정리에 의해 $f(1)=-\frac{9}{4}$이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=\left(2+\frac{1}{2}+b+1\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)\\&=\left(b+\frac{7}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)\\&=b^2+4b+\frac{7}{4}\\&=-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

$b^2+4b+4=0$

$(b+2)^2=0$

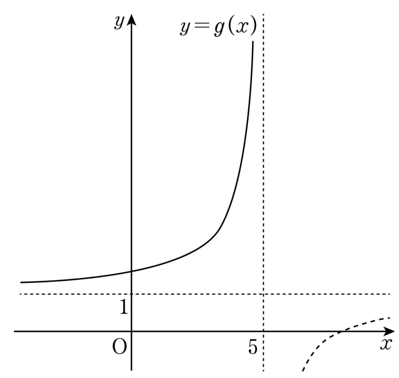
$b=-2$

따라서 $f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)$이고

$$\begin{aligned}f(6)&=(72+3-1)\times(3-2)\\&=74\end{aligned}$$

30. [출제의도] 유리함수의 그래프와 이차함수의 그래프를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x<5$에서 x의 값이 커지면 $g(x)$의 값도 커지므로 $g(t)<g(t+2)$이다.

$t<1$일 때 $h(t)=f(g(t+2))$이고 $g(t)\le x\le g(t+2)$이므로 $f(x)$는 $x=g(t+2)$에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $g(t)\le x\le g(t+2)$에서 x의 값이 커지면 $f(x)$의 값은 작아진다.

$1\le t<3$일 때 $h(t)=6$이므로 $g(t)\le x\le g(t+2)$에서 $f(x)$의 최솟값이 6으로 일정하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 a는 $1\le t<3$인 모든 t에 대하여 $g(t)\le a\le g(t+2)$이어야 하므로 $a=g(3)$이고, $b=6$이다.

한편 $g(3)=2$이므로

$f(x)=\alpha(x-2)^2+6$

$h(-1)=7$에서 $h(-1)=f(g(1))=7$

$g(1)=\frac{3}{2}$에서

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3}{2}\right)&=\alpha\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+6\\&=\frac{\alpha}{4}+6\\&=7\end{aligned}$$

$\alpha=4$

$f(x)=4(x-2)^2+6$

$$\begin{aligned}f(5)&=4\times 3^2+6\\&=42\end{aligned}$$