

제 2 교시

# 수학 영역(가형)

5지선다형

1.  ${}^9C_7$ 의 값은? [2점]

- ① 32      ② 34      ③ 36      ④ 38      ⑤ 40

2. 함수  $f(x) = 7 + 3\ln x$ 에 대하여  $f'(3)$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 2}{2x}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ② 1      ③  $\frac{3}{2}$       ④ 2      ⑤  $\frac{5}{2}$

4. 두 사건  $A, B$ 에 대하여

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A^C \cap B) = \frac{2}{3}$$

일 때,  $P(A)$ 의 값은? (단,  $A^C$ 은  $A$ 의 여사건이다.) [3점]

- ①  $\frac{1}{12}$       ②  $\frac{1}{8}$       ③  $\frac{1}{6}$       ④  $\frac{5}{24}$       ⑤  $\frac{1}{4}$

5.  $\int_0^{\ln 3} e^{x+3} dx$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{e^3}{2}$     ②  $e^3$     ③  $\frac{3}{2}e^3$     ④  $2e^3$     ⑤  $\frac{5}{2}e^3$

6. 곡선  $x^2 + xy + y^3 = 7$  위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는?  
[3점]

- ①  $-5$     ②  $-4$     ③  $-3$     ④  $-2$     ⑤  $-1$

7. 같은 종류의 비어 있는 상자 3개가 있다. 같은 종류의 장난감 12개를 남김없이 이 3개의 상자에 빈 상자가 없도록 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 넣은 장난감의 개수가 모두 다르게 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? [3점]

- ① 3    ② 5    ③ 7    ④ 9    ⑤ 11

8. 포물선  $y^2 - 4y - ax + 4 = 0$ 의 초점의 좌표가  $(3, b)$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 양수이다.) [3점]

- ① 13      ② 14      ③ 15      ④ 16      ⑤ 17

10.  $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{3e^4}{16}$       ②  $\frac{3e^4+1}{16}$       ③  $\frac{3e^4+2}{16}$   
 ④  $\frac{3e^4+3}{16}$       ⑤  $\frac{3e^4+4}{16}$

9. 함수  $f(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ 과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $g(2)$ 의 값은? [3점]

(가)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} = 8$

(나) 함수  $(f \circ g)(x)$ 의  $x=2$ 에서의 미분계수는 10이다.

- ① 1      ②  $\log_2 3$       ③ 2      ④  $\log_2 5$       ⑤  $\log_2 6$

11. 함수  $f(x) = xe^x$  에 대하여 곡선  $y = f(x)$  의 변곡점의 좌표가  $(a, b)$  일 때, 두 수  $a, b$  의 곱  $ab$  의 값은? [3점]

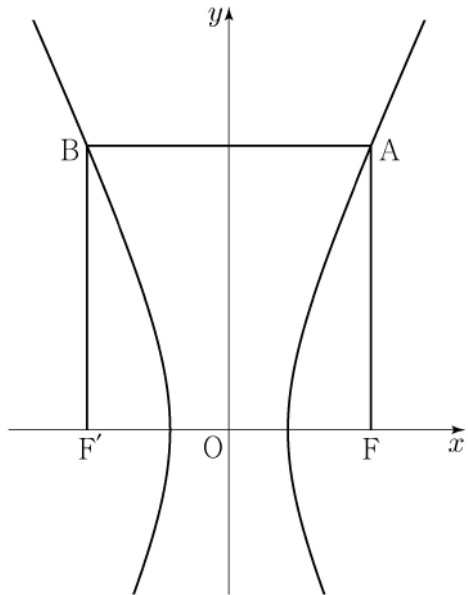
- ①  $4e^2$     ②  $e$     ③  $\frac{1}{e}$     ④  $\frac{4}{e^2}$     ⑤  $\frac{9}{e^3}$

12. 함수  $f(x) = \sin(x+\alpha) + 2\cos(x+\alpha)$  에 대하여

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  일 때,  $\tan\alpha$  의 값은? (단,  $\alpha$  는 상수이다.) [3점]

- ①  $-\frac{5}{6}$     ②  $-\frac{2}{3}$     ③  $-\frac{1}{2}$     ④  $-\frac{1}{3}$     ⑤  $-\frac{1}{6}$

13. 그림과 같이 두 초점이  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선이 있다. 점  $F$ 를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을  $A$ , 점  $F'$ 을 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제2사분면에서 만나는 점을  $B$ 라 하자. 사각형  $ABF'F$ 가 정사각형일 때, 정사각형  $ABF'F$ 의 대각선의 길이는? [3점]



- ①  $3+2\sqrt{2}$       ②  $5+\sqrt{2}$       ③  $4+2\sqrt{2}$   
 ④  $6+\sqrt{2}$       ⑤  $5+2\sqrt{2}$

14. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로  $a, b, c$ 라 할 때,  $a > b$ 이고  $a > c$ 일 확률은? [4점]

- ①  $\frac{13}{54}$       ②  $\frac{55}{216}$       ③  $\frac{29}{108}$       ④  $\frac{61}{216}$       ⑤  $\frac{8}{27}$

## 6

## 수학 영역(가형)

15. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t (t > 0)$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가

$$x = 2\sqrt{t+1}, \quad y = t - \ln(t+1)$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은? [4점]

- ①  $\frac{\sqrt{3}}{8}$     ②  $\frac{\sqrt{6}}{8}$     ③  $\frac{\sqrt{3}}{4}$     ④  $\frac{\sqrt{6}}{4}$     ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

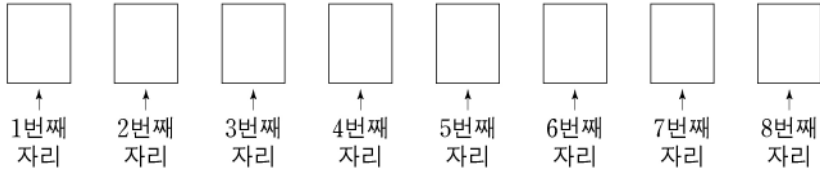
$$g(x) = \frac{f(x)\cos x}{e^x}$$

라 하자.  $g'(\pi) = e^\pi g(\pi)$  일 때,  $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$ 의 값은? (단,  $f(\pi) \neq 0$ )

[4점]

- ①  $e^{-2\pi}$                       ② 1                              ③  $e^{-\pi} + 1$   
 ④  $e^\pi + 1$                       ⑤  $e^{2\pi}$

17. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8 이하의 자연수  $k$ 에 대하여  $k$ 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가  $k$  이하인 사건을  $A_k$ 라 하자.



다음은 두 자연수  $m, n (1 \leq m < n \leq 8)$ 에 대하여 두 사건  $A_m$ 과  $A_n$ 이 서로 독립이 되도록 하는  $m, n$ 의 모든 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수를 구하는 과정이다.

$A_k$ 는  $k$ 번째 자리에  $k$  이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고,  $k$ 번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$$P(A_k) = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

$A_m \cap A_n (m < n)$ 은  $m$ 번째 자리에  $m$  이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고,  $n$ 번째 자리에  $n$  이하의 자연수 중  $m$ 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고,  $m$ 번째와  $n$ 번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$$P(A_m \cap A_n) = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

한편, 두 사건  $A_m$ 과  $A_n$ 이 서로 독립이기 위해서는

$$P(A_m \cap A_n) = P(A_m)P(A_n)$$

을 만족시켜야 한다.

따라서 두 사건  $A_m$ 과  $A_n$ 이 서로 독립이 되도록 하는  $m, n$ 의 모든 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수는  $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

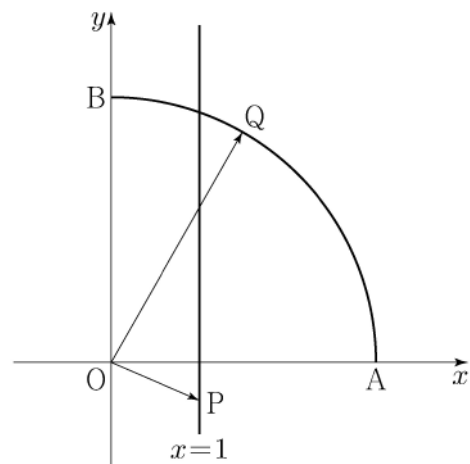
위의 (가)에 알맞은 식에  $k=4$ 를 대입한 값을  $p$ , (나)에 알맞은 식에  $m=3, n=5$ 를 대입한 값을  $q$ , (다)에 알맞은 수를  $r$ 라 할 때,  $p \times q \times r$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{3}{8}$     ②  $\frac{1}{2}$     ③  $\frac{5}{8}$     ④  $\frac{3}{4}$     ⑤  $\frac{7}{8}$

18. 좌표평면 위에 두 점  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 3)$ 과 직선  $x=1$  위의 점  $P(1, a)$ 가 있다. 점  $Q$ 가 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{2}$ 인

부채꼴  $OAB$ 의 호  $AB$  위를 움직일 때  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값을  $f(a)$ 라 하자.  $f(a)=5$ 가 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 값의 곱은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]

- ①  $-5\sqrt{3}$     ②  $-4\sqrt{3}$     ③  $-3\sqrt{3}$     ④  $-2\sqrt{3}$     ⑤  $-\sqrt{3}$



19. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수  $x_1, x_2, x_3, x_4$ 의 모든 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 의 개수는? [4점]

(가)  $n = 1, 2, 3$ 일 때,  $x_{n+1} - x_n \geq 2$ 이다.

(나)  $x_4 \leq 12$

- ① 210    ② 220    ③ 230    ④ 240    ⑤ 250

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(x) > 0$

(나)  $\ln f(x) + 2 \int_0^x (x-t)f(t) dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ.  $x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. 함수  $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수  $F(x)$ 를  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 할 때,

$f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



21. 함수  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  와 양의 실수  $t$ 에 대하여 기울기가  $t$ 인 직선이 곡선  $y=f(x)$ 에 접할 때 접점의  $x$ 좌표를  $g(t)$ 라 하자. 원점에서 곡선  $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가  $a$ 일 때, 미분가능한 함수  $g(t)$ 에 대하여  $a \times g'(a)$ 의 값은? [4점]

- ①  $-\frac{\sqrt{e}}{3}$       ②  $-\frac{\sqrt{e}}{4}$       ③  $-\frac{\sqrt{e}}{5}$   
 ④  $-\frac{\sqrt{e}}{6}$       ⑤  $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

단답형

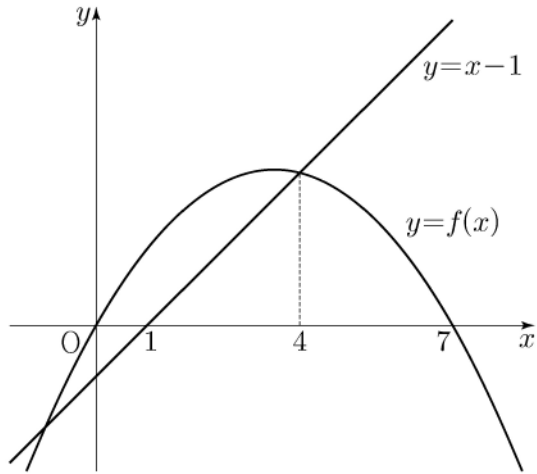
22. 벡터  $\vec{a} = (2, 1)$ 에 대하여 벡터  $10\vec{a}$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23.  $\cos \theta = \frac{1}{7}$  일 때,  $\csc \theta \times \tan \theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x-1$ 이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$$

을 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 값의 합을 구하시오.  
(단,  $f(0)=f(7)=0, f(4)=3$ ) [3점]



25. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수  $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [3점]

- (가) 함수  $f$ 의 치역의 원소의 개수는 4이다.
- (나)  $f(a)=a$ 인  $X$ 의 원소  $a$ 의 개수는 3이다.

26. 좌표평면에서  $|\overrightarrow{OP}| = 10$ 을 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 도형 위의 점  $A(a, b)$ 에서의 접선을  $l$ , 원점을 지나고 방향벡터가  $(1, 1)$ 인 직선을  $m$ 이라 하고, 두 직선  $l, m$ 이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하자.  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$  일 때, 두 수  $a, b$ 의 곱  $ab$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $O$ 는 원점이고,  $a > b > 0$ 이다.) [4점]

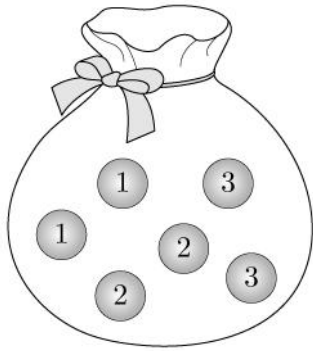
27. 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때,  $k(1 \leq k \leq 6)$  번째 꺼낸 공에 적힌 수를  $a_k$ 라 하자. 두 자연수  $m, n$ 을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$

$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

이라 할 때,  $m > n$ 일 확률은  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



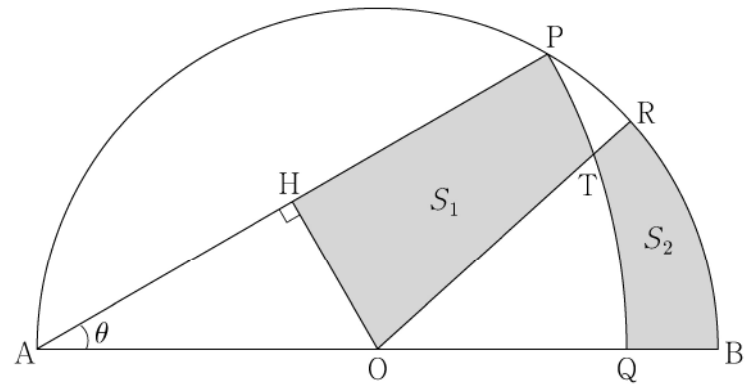
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가  $\overline{AP}$ 인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.

호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_1$ , 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_2$ 라 하자.  $\angle PAB = \theta$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1 - S_2}{OH} = a \text{이다. } 50a \text{의 값을 구하시오. (단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{)}$$

[4점]



29. 좌표평면에서 곡선  $C: y = \sqrt{8-x^2} (2 \leq x \leq 2\sqrt{2})$  위의 점 P에 대하여  $\overline{OQ} = 2, \angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.  
 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.  
 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이  $a+b\sqrt{2}$ 이다.  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

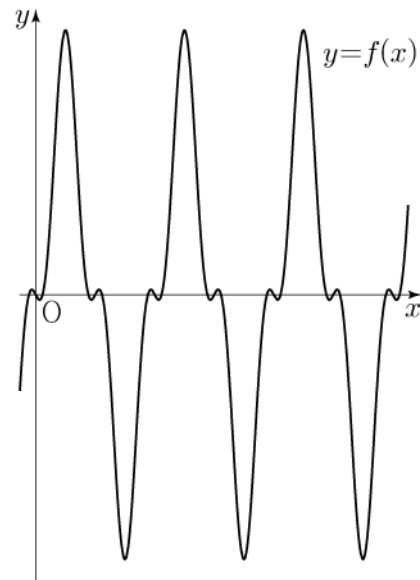
30. 상수 a, b에 대하여 함수  $f(x) = a\sin^3 x + b\sin x$ 가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수  $t (1 < t < 14)$ 에 대하여 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = t$ 가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를  $x_n$ 이라 하고

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt$$

라 하자.  $\sum_{n=1}^{101} c_n = p + q\sqrt{2}$ 일 때,  $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.