수학 영역

가형 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	②	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	①	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	③	19	③	20	①
21	②	22	4	23	6	24	24	25	15
26	100	27	26	28	8	29	486	30	125

가형 해설

1. [출제의도] 평면벡터의 성분의 합 계산하기
$2\vec{a}-\vec{b}=2(4,\ 5)-(-3,\ 2)=(11,\ 8)$
따라서 모든 성분의 합은 $11+8=19$

2. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기
$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\frac{3}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}=\frac{3}{2}$

3. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표 계산하기
선분 OA 를 1:2 로 내분하는 점 P 의 좌표는
$\left(\frac{1\times 6+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times 3+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times 9+2\times 0}{1+2}\right)$
이므로 $(2,\ 1,\ 3)$
따라서 $a+b+c=6$

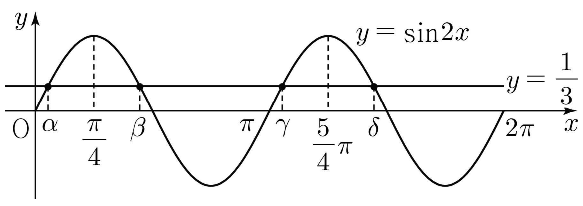
4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기
두 사건 A 와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기
함수 $f(x)=x\ln x$ 에서 $f'(x)=\ln x+1$ 이므로
$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1$

6. [출제의도] 원순열을 활용하여 확률 문제해결하기
A, B 를 포함한 6 명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
A, B 가 이웃하여 6 명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는
$2!\times(5-1)!=2!\times 4!=48$
따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

7. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기
$\frac{dx}{dt}=2e^{2t-6}$, $\frac{dy}{dt}=2t-1$
$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-1}{2e^{2t-6}}$
따라서 $t=3$ 일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2e^0}=\frac{5}{2}$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기
$0\le x\le 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x=\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 해는 두 함수 $y=\sin 2x$, $y=\frac{1}{3}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.



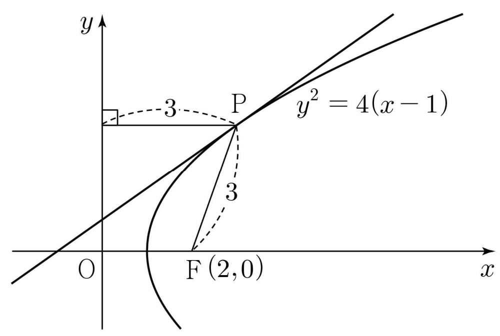
네 교점의 x 좌표 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$에 대하여
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ 이고 $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{5}{4}\pi$ 이므로
방정식의 모든 해의 합은
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=3\pi$

9. [출제의도] 분수함수의 정적분 이해하기
$\int_3^6\frac{2}{x^2-2x}dx=\int_3^6\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx$
$=\left[\ln|x-2|-\ln|x|\right]_3^6$
$=\ln 2$

10. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기
역사 동아리 학생 중 임의로 선택한 1 명이 박물관 A 를 선택한 학생인 사건을 X, 1 학년 학생인 사건을 Y라 하면
$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{9}{32}}{\frac{24}{32}}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

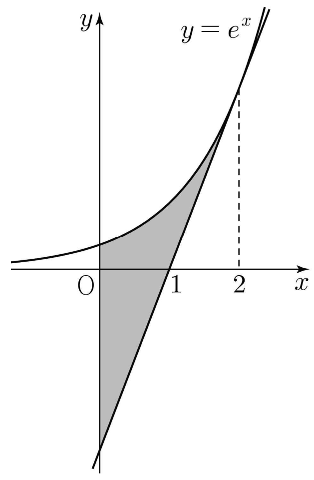
11. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기
남학생 4 명을 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=6$
모든 모둠에 남학생과 여학생이 각각 1 명 이상 포함되도록 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는
$6\times 3!=36$

12. [출제의도] 포물선의 정의와 음함수의 미분법 이해하기



포물선 $y^2=4(x-1)$ 의 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, 준선은 $x=0$ 이다.
$\overline{\mathrm{PF}}=3$ 이므로 점 P 에서 준선 $x=0$ 에 내린 수선의 발까지의 거리는 3
점 P 의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{2})$
$y^2=4(x-1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
$2y\frac{dy}{dx}=4$ 이므로
$x=3$, $y=2\sqrt{2}$ 를 대입하면
$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 점 P 에서의 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

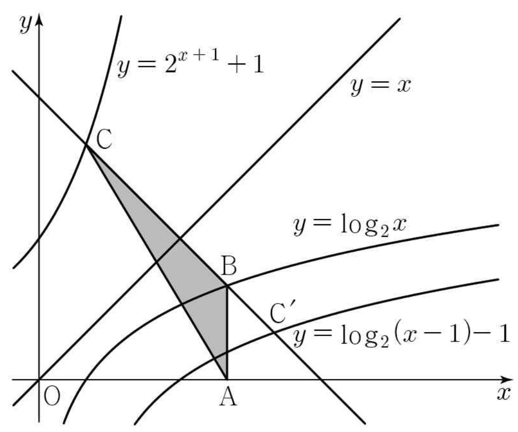
13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기
곡선 $y=e^x$ 과 접선 l 이 만나는 접점의 x 좌표를 t 라 하면 점 $(t,\ e^t)$ 에서의 접선의 기울기는 e^t 이므로 접선 l 의 방정식은
$y=e^t(x-t)+e^t$
접선 l 이 점 $(1,\ 0)$ 을 지나므로
$e^t(1-t)+e^t=0$
$(2-t)e^t=0$
$t=2$
곡선 $y=e^x$ 과 y 축 및 직선 l 으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면
$S=\int_0^2\{e^x-(e^2x-e^2)\}dx$
$=\int_0^2(e^x-e^2x+e^2)dx$
$=\left[e^x-\frac{e^2}{2}x^2+e^2x\right]_0^2=e^2-1$

14. [출제의도] 역함수 미분법 이해하기
$f(1)=0$ 이므로 $g(0)=1$
$f'(x)=\frac{2x\times x-(x^2-1)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$
$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로
$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

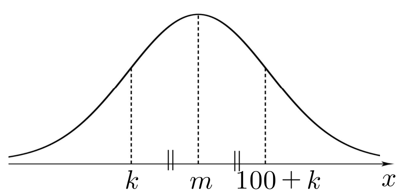
15. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기



점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점은 $\mathrm{B}(4,\ 2)$ 이다.
점 B 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$ 과 만나는 점을 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 라 하자.
점 C 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점 $\mathrm{C}'(b,\ a)$ 는 곡선 $y=\log_2(x-1)-1$ 위에 있다.
점 C′ 을 x 축 방향으로 -1 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 점 $(b-1,\ a+1)$ 은

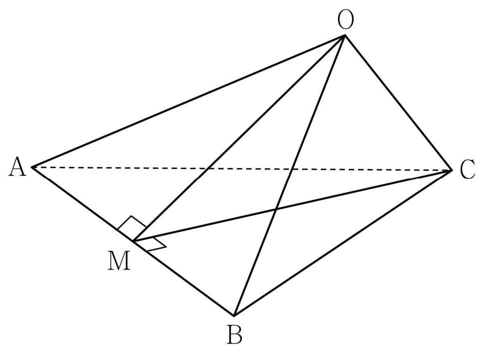
B이다.
$a+1=2$, $b-1=4$ 이므로
$a=1$, $b=5$
따라서 삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

16. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제해결하기
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 8^2)$ 을 따른다.
조건 (가)를 만족시키는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.

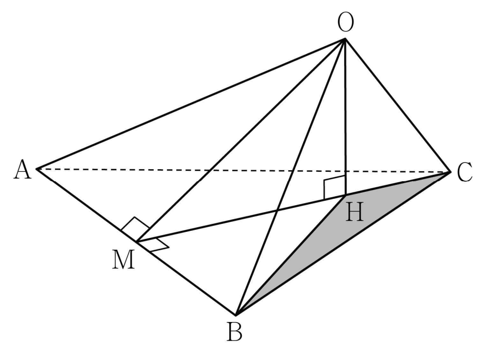


$m-k=(100+k)-m$, $k=m-50$
$\mathrm{P}(X\geq 2k)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{m-100}{8}\right)=0.0668$
$0.5-\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{m-100}{8}\right)$
$=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{m-100}{8}\right)=0.4332$
$\frac{m-100}{8}=1.5$
따라서 $m=112$

17. [출제의도] 정사영 이해하기
점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 M 이라 하자.



$\overline{\mathrm{OC}}\perp$(평면 OAB), $\overline{\mathrm{CM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ 이고
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 이다.
$\overline{\mathrm{MC}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OM}}=3\sqrt{2}$
점 O 에서 선분 MC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OH}}\perp$(평면 ABC)이므로 점 O 의 평면 ABC 위로의 정사영은 점 H 이다.



$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\overline{\mathrm{OH}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{HC}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MH}}=2\sqrt{3}$
삼각형 OBC 의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HBC 이고 점 H 는 선분 CM 을 1 : 2 로 내분한다.
($\triangle$HBC 의 넓이)$=\frac{1}{6}\times$($\triangle$ABC 의 넓이)
따라서 정사영의 넓이는 $\frac{1}{6}\times9\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

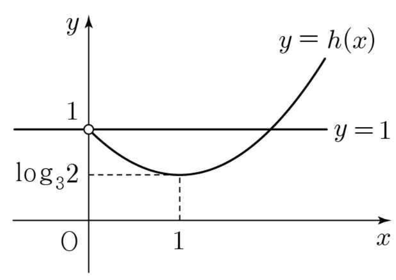
공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4 개와 서로 같은 검은 공 3 개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$N=\boxed{35}$ 이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5 이다.
(i) $X=2$ 일 때,
번호 2 가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1 개, 번호 2 가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2 개와 검은 공 3 개를 나열하는 경우의 수는
$1\times\frac{5!}{2!\times3!}$ 이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{10}{N}$
(ii) $X=3$ 일 때,
번호 3 이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1 개와 검은 공 1 개, 번호 3 이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2 개와 검은 공 2 개를 나열하는 경우의 수는 $2!\times\frac{4!}{2!\times2!}$ 이므로
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{12}{N}$
(iii) $X=4$ 일 때,
번호 4 가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1 개와 검은 공 2 개, 번호 4 가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2 개와 검은 공 1 개를 나열하는 경우의 수는 $\boxed{9}$ 이므로
$\mathrm{P}(X=4)=\frac{\boxed{9}}{N}$
(iv) $X=5$ 일 때,
확률질량함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(X=5)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$
따라서 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=2}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{\frac{16}{5}}$

$a=\frac{7!}{4!\times3!}=35$, $b=\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

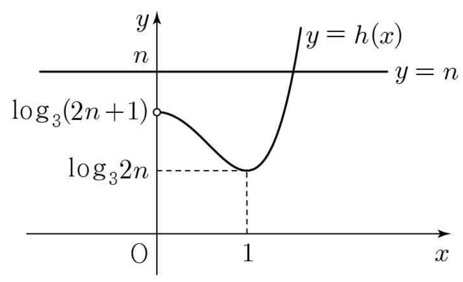
X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{10}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$c=2\times\frac{10}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{9}{35}+5\times\frac{4}{35}=\frac{16}{5}$
따라서 $a+b+5c=60$

19. [출제의도] 미분을 활용하여 함수의 그래프 추론하기
ㄱ. $g'(x)=\frac{1}{\ln3}\times\frac{4x^3}{x^4+2n}$ 이므로
$g'(f(1))=g'(0)=0$
$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=0$ (참)
ㄴ. $h(x)=g(f(x))=\log_3\left[\{f(x)\}^4+2n\right]$
$h'(x)=\frac{1}{\ln3}\times\frac{4\{f(x)\}^3f'(x)}{\{f(x)\}^4+2n}$
$=\frac{1}{\ln3}\times\frac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{(x^n-1)^4+2n}$
열린 구간 (0, 1) 에서
$-1<x^n-1<0$ 이므로 $h'(x)<0$ 이다.
열린 구간 (0, 1) 에서
함수 $h(x)$ 는 감소한다. (거짓)
ㄷ. $x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $\log_3 2n$ 을 갖는다.
함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.
(i) $n=1$ 일 때,



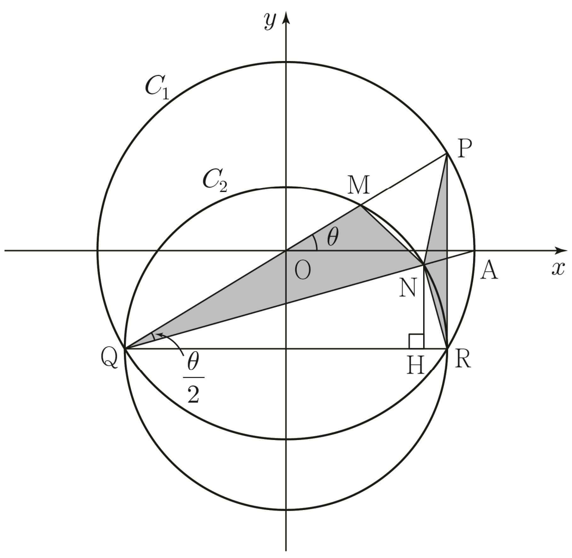
(ii) $n\geq2$ 일 때,



(i), (ii)에 의하여 방정식 $h(x)=n$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1 이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

20. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기
$u'(x)=x$, $v(x)=g(x)$ 라 하면
$u(x)=\frac{1}{2}x^2$, $v'(x)=g'(x)$
조건 (가)에 의하여 $g(1)=0$,
$g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$
$\int_1^2 xg(x)dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2g(x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2g'(x)dx$
$=2g(2)-\frac{1}{2}g(1)-\int_1^2\left\{\frac{1}{2}x^2\times\frac{f(x^2+1)}{x}\right\}dx$
$=2\times3-\frac{1}{2}\times0-\frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2+1)dx$
$x^2+1=t$ 라 하자.
$\int_1^2 xg(x)dx$
$=6-\frac{1}{2}\int_2^5\frac{1}{2}f(t)dt$
$=6-\frac{1}{4}\times16=2$

21. [출제의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\widehat{\mathrm{PA}} = \widehat{\mathrm{AR}}$ 이므로

$\angle \mathrm{PQA} = \angle \mathrm{AQR} = \dfrac{\theta}{2}$

$\angle \mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PR}} = 2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{QR}} = 2\cos\theta$

$\angle \mathrm{QMR} = \angle \mathrm{QNR} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{QM}} = 2\cos\theta\cos\theta$, $\overline{\mathrm{QN}} = 2\cos\theta\cos\dfrac{\theta}{2}$

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QM}}\times\overline{\mathrm{QN}}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\quad = \dfrac{1}{2}\times 2\cos^2\theta\times 2\cos\theta\cos\dfrac{\theta}{2}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\quad = 2\cos^3\theta\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}$

점 N에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 $T(\theta) = \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{HR}}$

$\overline{\mathrm{HR}} = \overline{\mathrm{QR}} - \overline{\mathrm{QH}} = 2\cos\theta - \overline{\mathrm{QN}}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\quad = 2\cos\theta - 2\cos\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$\quad = 2\cos\theta\left(1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\quad = 2\cos\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$T(\theta) = \dfrac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\cos\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$\quad = 2\sin\theta\cos\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)}$

$= \displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times 2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\left(\cos^2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}$

$= 1\times\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 2$

22. [출제의도] 자연수의 분할 계산하기

자연수 7을 3개의 자연수로 분할하는 경우는

$7 = 1+1+5$

$\quad = 1+2+4$

$\quad = 1+3+3$

$\quad = 2+2+3$

따라서 경우의 수는 4

23. [출제의도] 지수부등식 계산하기

$(2^x)^2 - 10\times 2^x + 16 \le 0$

$(2^x-2)(2^x-8) \le 0$

$2 \le 2^x \le 8$

$1 \le x \le 3$

만족시키는 자연수는 1, 2, 3이다.

$1+2+3 = 6$

24. [출제의도] 벡터의 내적 이해하기

$\vec{a}+\vec{b} = \left(4t,\ \dfrac{3}{t}\right)$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 16t^2 + \dfrac{9}{t^2}$ 이고 $t^2 > 0$ 이므로

절대부등식의 성질에 의하여

$16t^2 + \dfrac{9}{t^2} \ge 2\sqrt{16t^2\times\dfrac{9}{t^2}} = 24$

따라서 $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24

25. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{7}{8}$

$\dfrac{\tan\alpha - 1}{1+\tan\alpha} = \dfrac{7}{8}$

$8(\tan\alpha - 1) = 7(1+\tan\alpha)$

$\tan\alpha = 15$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

9 이하의 음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여 네 자리 이하의 자연수를

$a\times 10^3 + b\times 10^2 + c\times 10 + d$ 라 하자.

3000보다 작은 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 10이므로

$1 \le a \le 2$ 이고 $a+b+c+d = 10$

(i) $a=1$ 인 경우

$b+c+d=9$ 를 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_9 = 55$

(ii) $a=2$ 인 경우

$b+c+d=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수는

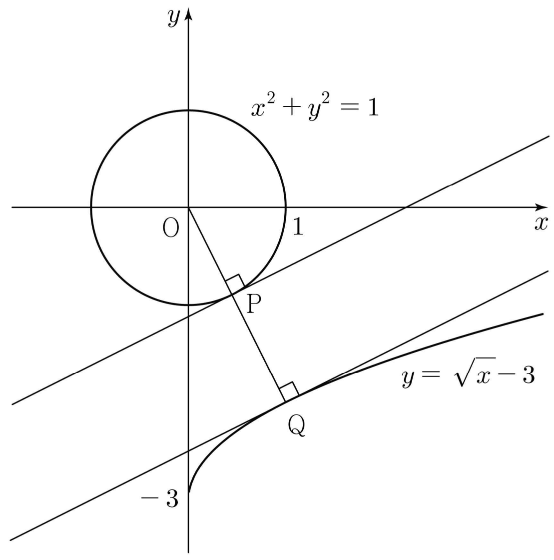
${}_3\mathrm{H}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_8 = 45$

(i), (ii)에 의하여 경우의 수는 100

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 위의 임의의 점 Q의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}-3)$ $(t \ge 0)$이라 하고, 원점을 O라 하자.

선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 점 Q에 대하여 선분 OQ와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점이 P이고, 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.



곡선 $y = \sqrt{x}-3$ 위의 점 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t}-3)$ $(t>0)$ 에서의 접선과 직선 OQ는 수직이다.

$\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\times\dfrac{\sqrt{t}-3}{t} = -1$

$2(\sqrt{t})^3 + \sqrt{t} - 3 = 0$

$(\sqrt{t}-1)(2t+2\sqrt{t}+3) = 0$

$t=1$ 이므로 $\mathrm{Q}(1,\ -2)$ 이다.

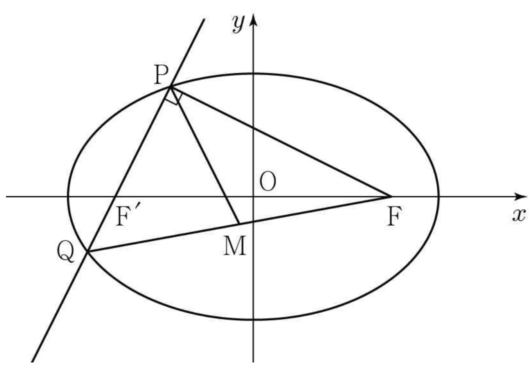
$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ}} - 1$

$\quad = \sqrt{5}-1$

$a=5$, $b=1$ 이므로 $a^2+b^2 = 26$

28. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{QM}} = \overline{\mathrm{FM}} = \overline{\mathrm{PM}} = 5$ 이므로 세 점 P, Q, F는 중심이 M이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.



삼각형 PQF는 직각삼각형이므로

$6^2 + \overline{\mathrm{PF}}^2 = 10^2$

$\overline{\mathrm{PF}} = 8$

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 2a$, $\overline{\mathrm{QF}} + \overline{\mathrm{QF'}} = 2a$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} + \overline{\mathrm{QF}} + \overline{\mathrm{QF'}} = \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QF}} = 24 = 4a$

$a = 6$

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 12$ 이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} = 4$

삼각형 PF′F는 직각삼각형이므로

$4^2 + 8^2 = \overline{\mathrm{FF'}}^2$

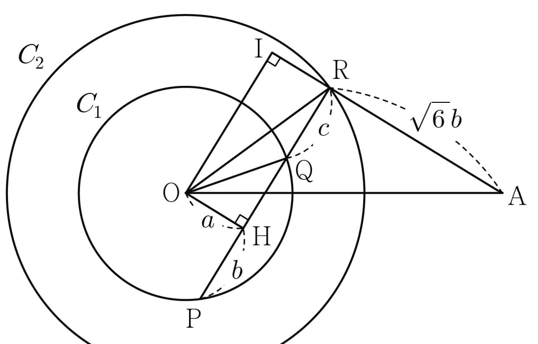
$\overline{\mathrm{FF'}} = 4\sqrt{5}$ 이므로 $c = 2\sqrt{5}$

$c^2 = a^2 - b^2$ 이므로 $b^2 = 16$, $b = 4$

따라서 이 타원의 단축의 길이는 8

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 세 점 P, Q, R 는 한 직선 위에 있고, 조건 (나)에 의하여 직선 AR 와 직선 PQ 는 수직이므로 $\overline{\mathrm{AR}} \perp \overline{\mathrm{PR}}$ 이다. 점 O 에서 선분 PQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

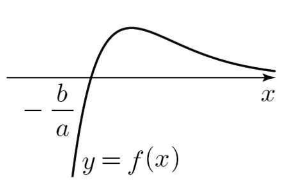


$\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{HQ}}=b$, $\overline{\mathrm{QR}}=c$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{6}\,b$
삼각형 OHQ 는 직각삼각형이므로
$a^2+b^2=5$ …… ㉠
삼각형 OHR 는 직각삼각형이므로
$a^2+(b+c)^2=14$ …… ㉡
점 O 에서 선분 AR 의 연장선에 내린 수선의 발을 I 라 하면
$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{HR}}=b+c$, $\overline{\mathrm{IA}}=a+\sqrt{6}\,b$ 이므로
삼각형 AIO 에서
$(a+\sqrt{6}\,b)^2+(b+c)^2=44$ …… ㉢
㉡과 ㉢에서
$2\sqrt{6}\,ab+6b^2=30$ …… ㉣
㉠과 ㉣에서
$6a^2-2\sqrt{6}\,ab=0$
$a=0$ 또는 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$
세 점 O , P , Q 가 한 직선 위에 있지 않으므로
$a\neq 0$ 이고 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$
$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AR}}=3\sqrt{2}$ 이고 원 C_1 위의 점 S 에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{AI}}|=3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=24$
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|\cos\theta$
$=3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos\theta$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 는 $\cos\theta=1$ 일 때 최댓값을 갖고 $\cos\theta=-1$ 일 때 최솟값을 가지므로
$-3\sqrt{10}\leq\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}\leq3\sqrt{10}$
$24-3\sqrt{10}\leq\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}\leq24+3\sqrt{10}$
$M=24+3\sqrt{10}$, $m=24-3\sqrt{10}$
$Mm=(24+3\sqrt{10})\times(24-3\sqrt{10})=486$

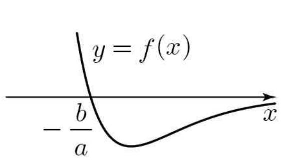
30. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

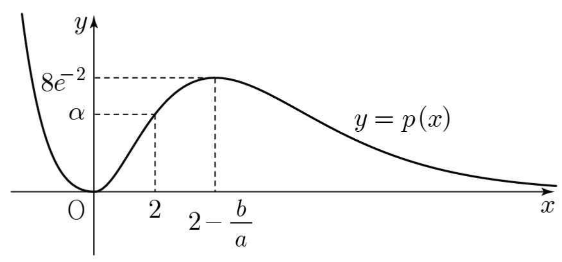
(ⅰ) $a>0$



(ⅱ) $a<0$



$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$
조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x=-\dfrac{b}{a}$ 에서 극댓값 α 를 가지므로 $a<0$ 이고 $b>0$ 이다.
$g(x)-k\geq xf(x)$ 에서 $g(x)-xf(x)\geq k$ 이므로
$p(x)=g(x)-xf(x)$ 라 하면
$p'(x)=g'(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)$
$f'(x)=-\dfrac{1}{2}a\left(x-2+\dfrac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$
$p'(x)=\dfrac{1}{2}ax\left(x-2+\dfrac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$
조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $p(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(-\dfrac{b}{a}\right)=\alpha$, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ 에 의하여
$p\left(-\dfrac{b}{a}\right)=g\left(-\dfrac{b}{a}\right)-\left(-\dfrac{b}{a}\right)f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=\alpha$
$2=-\dfrac{b}{a}$
$p(x)=g(x)-xf(x)\geq k$ 에서 양수 x 의 범위에서 함수 $p(x)$ 의 최댓값은 $h(k)$ 의 값이 존재하는 k 의 최댓값이므로 $p(4)=8e^{-2}$
$g(4)=\displaystyle\int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}}dt$
$=\left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^4-\displaystyle\int_0^4\left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right)dt$
$=-4ae^{-2}-4a-\left[4ae^{-\frac{t}{2}}\right]_0^4$
$=-4ae^{-2}-4a-4ae^{-2}+4a$
$=-8ae^{-2}$
$p(4)=g(4)-4f(4)$
$=-8ae^{-2}-4\times2ae^{-2}$
$=-16ae^{-2}$
$-16ae^{-2}=8e^{-2}$ 이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$
따라서 $100(a^2+b^2)=125$